

第4章 正弦交流电路

- 4.1 正弦量的基本概念
- 4.2 正弦量的有效值
- 4.3 正弦量的相量表示法
- 4.4 正弦电路中的电阻元件
- 4.5 正弦电路中的电感元件
- 4.6 正弦电路中的电容元件
- 4.7 基尔霍夫定律的相量形式
- 4.8 复阻抗、复导纳及其等效变换
- 4.9 RLC 串联电路
- 4.10 RLC 并联电路
- 4.11 正弦交流电路的相量分析法
- 4.12 正弦交流电路的功率
- 4.13 功率因数的提高
- 4.14 谐振





4.1 正弦量的基本概念



目的与要求

掌握正弦量的三要素



重点与 难点

重点：三要素

难点：波形图的画法



4.1.1 正弦交流电的三要素（一）

正弦交流电：电压、电流均随时间按正弦函数规律变化

1. 振幅值（最大值）

正弦量瞬时值中的最大值,叫振幅值,也叫峰值。用大写字母带下标“m”表示,如 U_m 、 I_m 等。



4.1.1 正弦交流电的三要素（二）

2. 角频率 ω

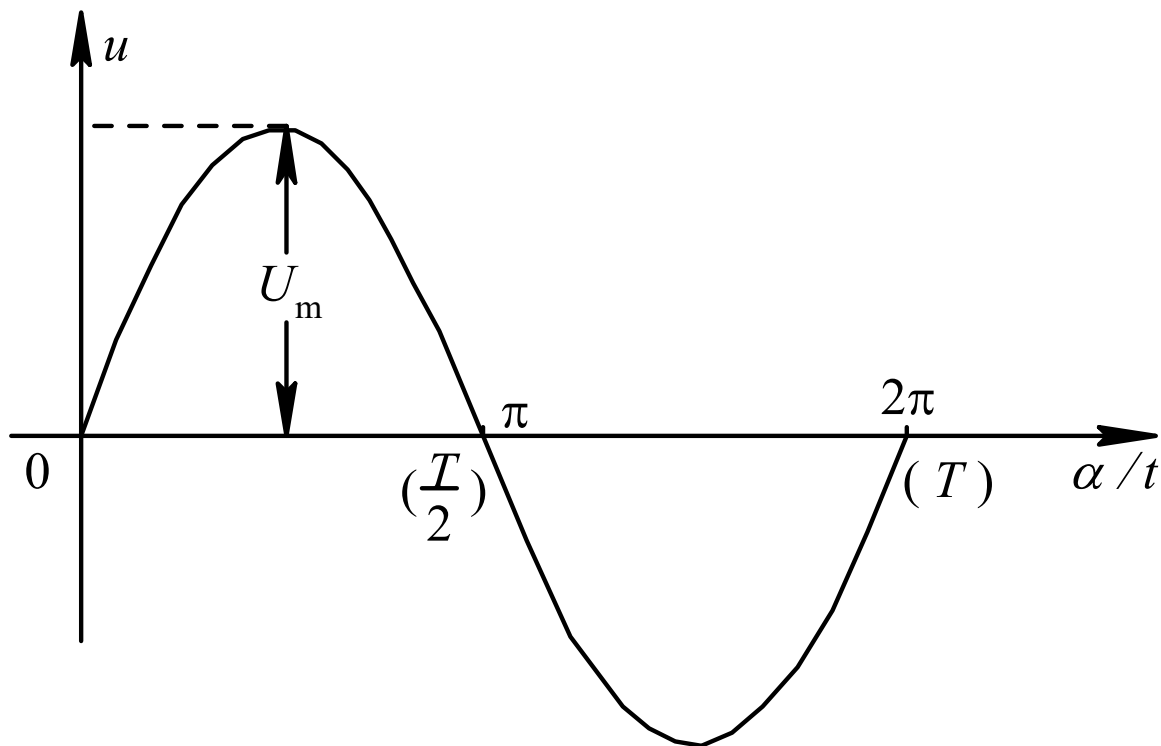
角频率 ω 表示正弦量在单位时间内变化的弧度数, 即

$$\omega = \frac{a}{t}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (4.2)$$



4.1.1 正弦交流电的三要素（三）

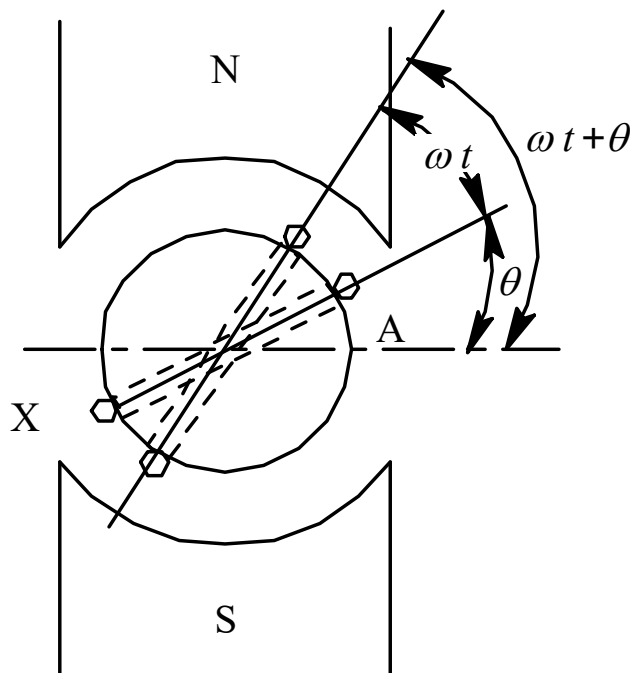




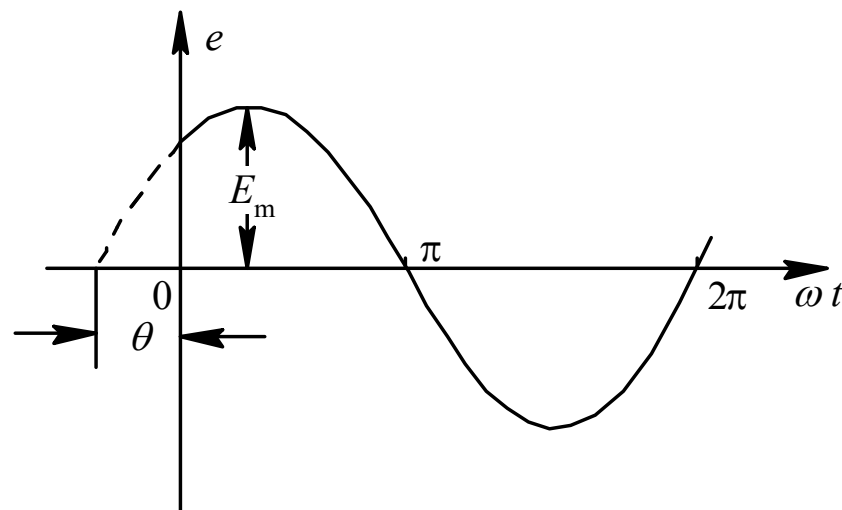
4.1.1 正弦交流电的三要素（四）

3. 初相

$$e = E_m \sin(\omega t + \theta)$$



(a)

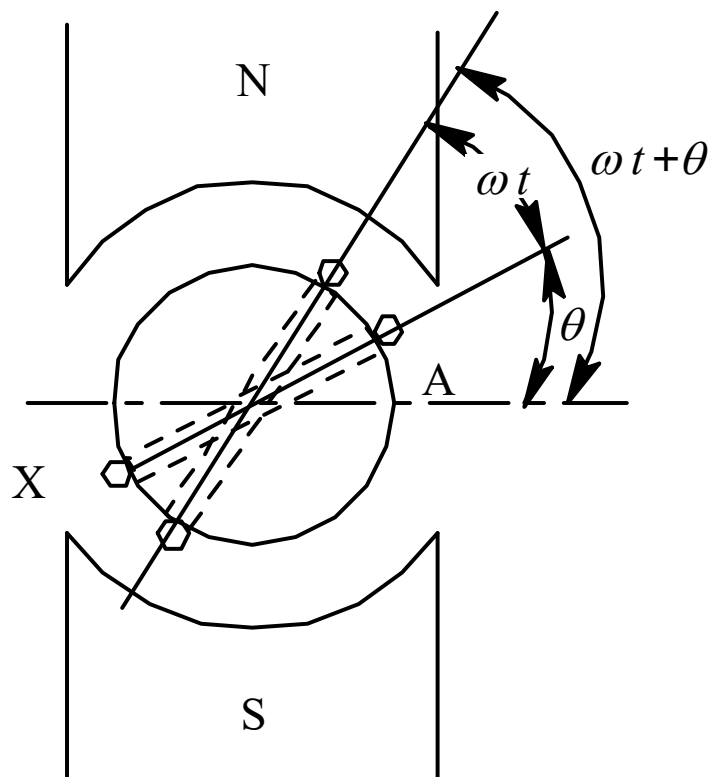


(b)

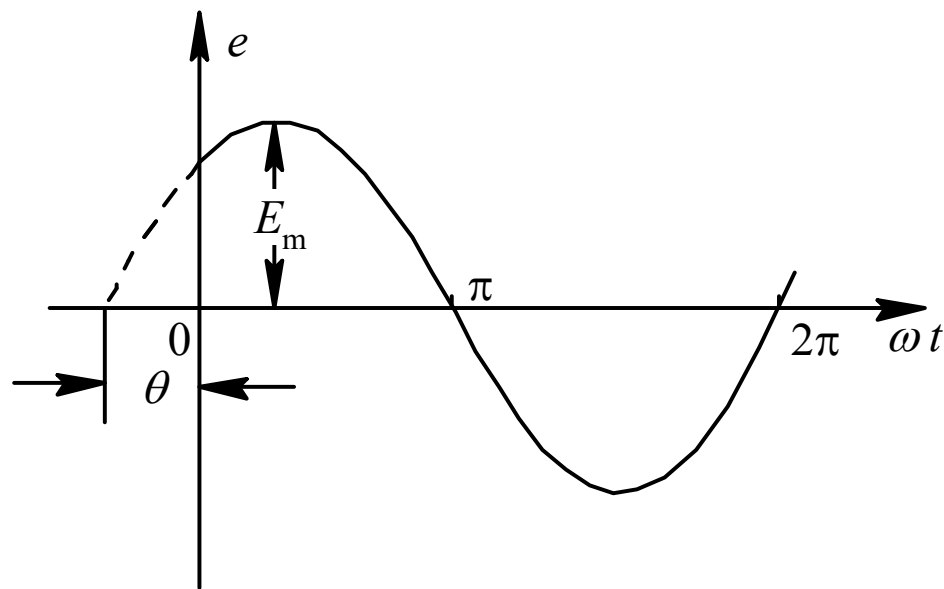
图 4.2 初相不为零的正弦波形



4.1.1 正弦交流电的三要素（五）



(a)



(b)

图 4.2 初相不为零的正弦波形



4.1.1 正弦交流电的三要素（六）

相位： $\omega t + \theta$

初相 θ ： $t=0$ 时的相位

正弦量零值：负值向正值变化之间的零点

若零点在坐标原点左侧， $\theta > 0$

若零点在坐标原点右侧， $\theta < 0$



4.1.1 正弦交流电的三要素（七）

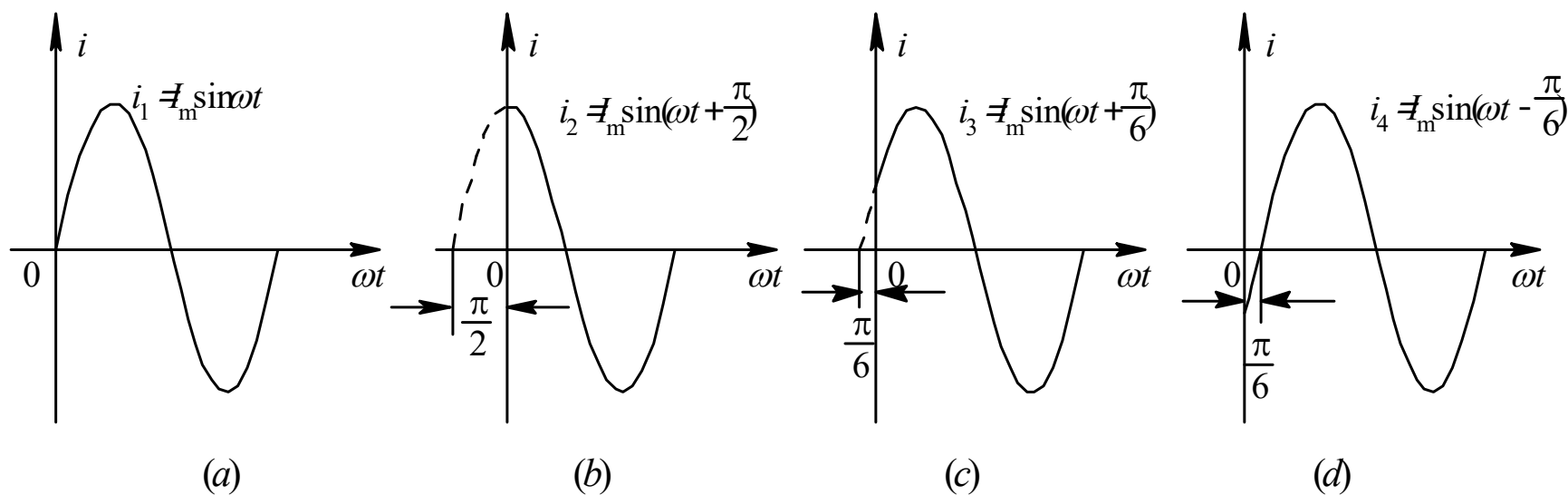


图4.3 几种不同计时起点的正弦电流波形



例 4.2 (一)

在选定的参考方向下, 已知两正弦量的解析式为 $u=200\sin(1000t+200^\circ)\text{ V}$, $i=-5\sin(314t+30^\circ)\text{ A}$, 试求两个正弦量的三要素。

解 (1) $u=200\sin(1000t+200^\circ)=200\sin(1000t-160^\circ)\text{ V}$

所以电压的振幅值 $U_m=200\text{ V}$, 角频率 $\omega=1000\text{ rad/s}$, 初相 $\theta_u=-160^\circ$ 。



例 4.2 (二)

(2) $i=-$

$$5\sin(314t+30^\circ) = 5\sin(314t+30^\circ + 180^\circ) = 5\sin(314t - 150^\circ) \text{ A}$$

所以电流的振幅值 $I_m=5\text{A}$, 角频率 $\omega=314\text{rad/s}$, 初相 $\theta_i=-150^\circ$ 。



例 4.3 (一)

已知选定参考方向下正弦量的波形图
如图4.4所示, 试写出正弦量的解析式。

解:

$$u_1 = 200 \sin(\omega t + \frac{\pi}{3}) V$$

$$u_2 = 250 \sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) V$$



例 4.3 (二)

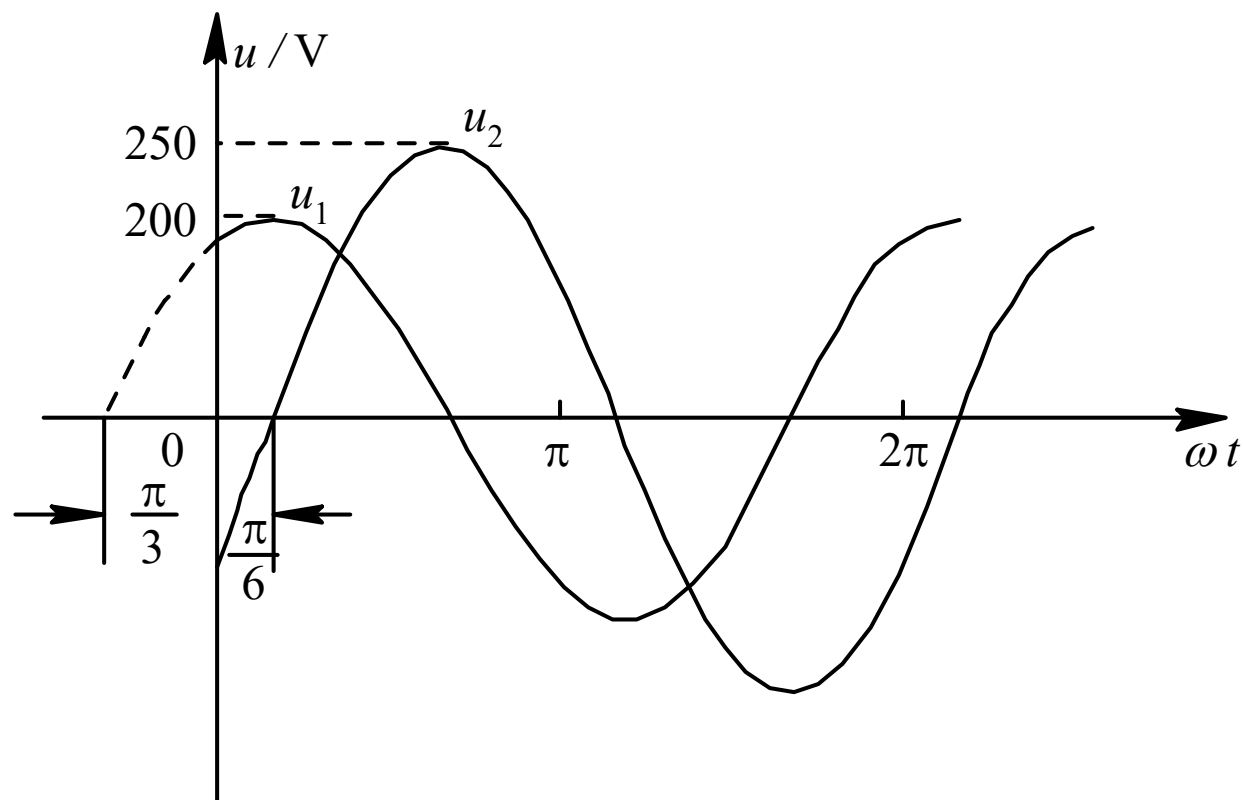


图 4.4 例 4.3 图



4.1.2 相位差（一）

两个同频率正弦量的相位之差, 称为相位差, 用字母 “ φ ”表示。

设两正弦量:

$$u_1 = U_{m1} \sin(\omega t + \theta_1)$$

$$u_2 = U_{m2} \sin(\omega t + \theta_2)$$

$$\varphi_{12} = (\omega t + \theta_1) - (\omega t + \theta_2) = \theta_1 - \theta_2$$



4.1.2 相位差（二）

(1) $\varphi_{12} = \theta_1 - \theta_2 > 0$ 且 $|\varphi_{12}| \leq \pi$ 弧度 U1 达到振幅值后，U2 需经过一段时间才能到达，U1 超前于 U2

(2) $\varphi_{12} = \theta_1 - \theta_2 < 0$ 且 $|\varphi_{12}| \leq \pi$ 弧度 U1 滞后 U2

(3) $\varphi_{12} = \theta_1 - \theta_2 = 0$, 称这两个正弦量同相

(4) $\varphi_{12} = \theta_1 - \theta_2 = \pi$, 称这两个正弦量反相

(5) $\varphi_{12} = \theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2}$, 称这两个正弦量正交



4.1.2 相位差（三）

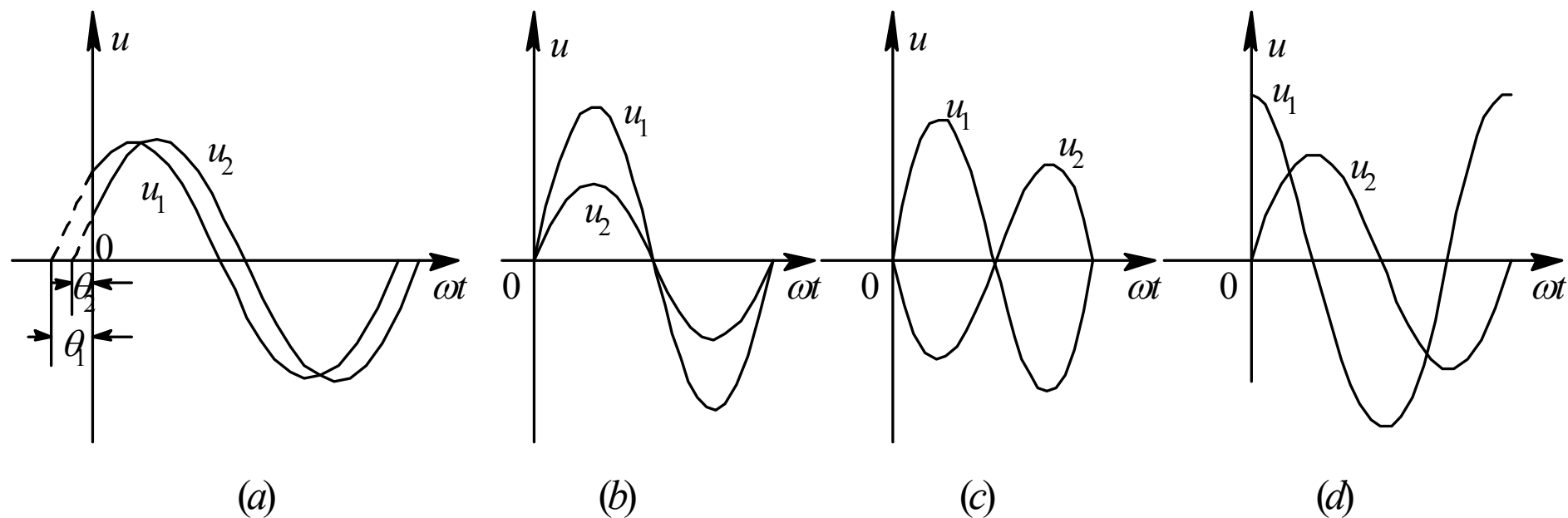


图4.5 同频率正弦量的几种相位关系



例 4.4 (一)

已知

$$u = 220\sqrt{2} \sin(\omega t + 235^\circ) V,$$
$$i = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) A$$

求u和i的初相及两者间的相位关系。



例 4.4 (二)

解

$$\begin{aligned} u &= 220\sqrt{2} \sin(\omega t + 235^\circ) V \\ &= 220\sqrt{2} \sin(\omega t - 125^\circ) V \end{aligned}$$

所以电压 u 的初相角为 -125° ，电流 i 的初相角为 45° 。

$$\varphi_{ui} = \theta_u - \theta_i = -125^\circ - 45^\circ = -170^\circ < 0$$

表明电压 u 滞后于电流 i 170° 。

例 4.5 (一)

分别写出图4.6中各电流 i_1 、 i_2 的相位差，并说明 i_1 与 i_2 的相位关系。

例 4.5 (二)

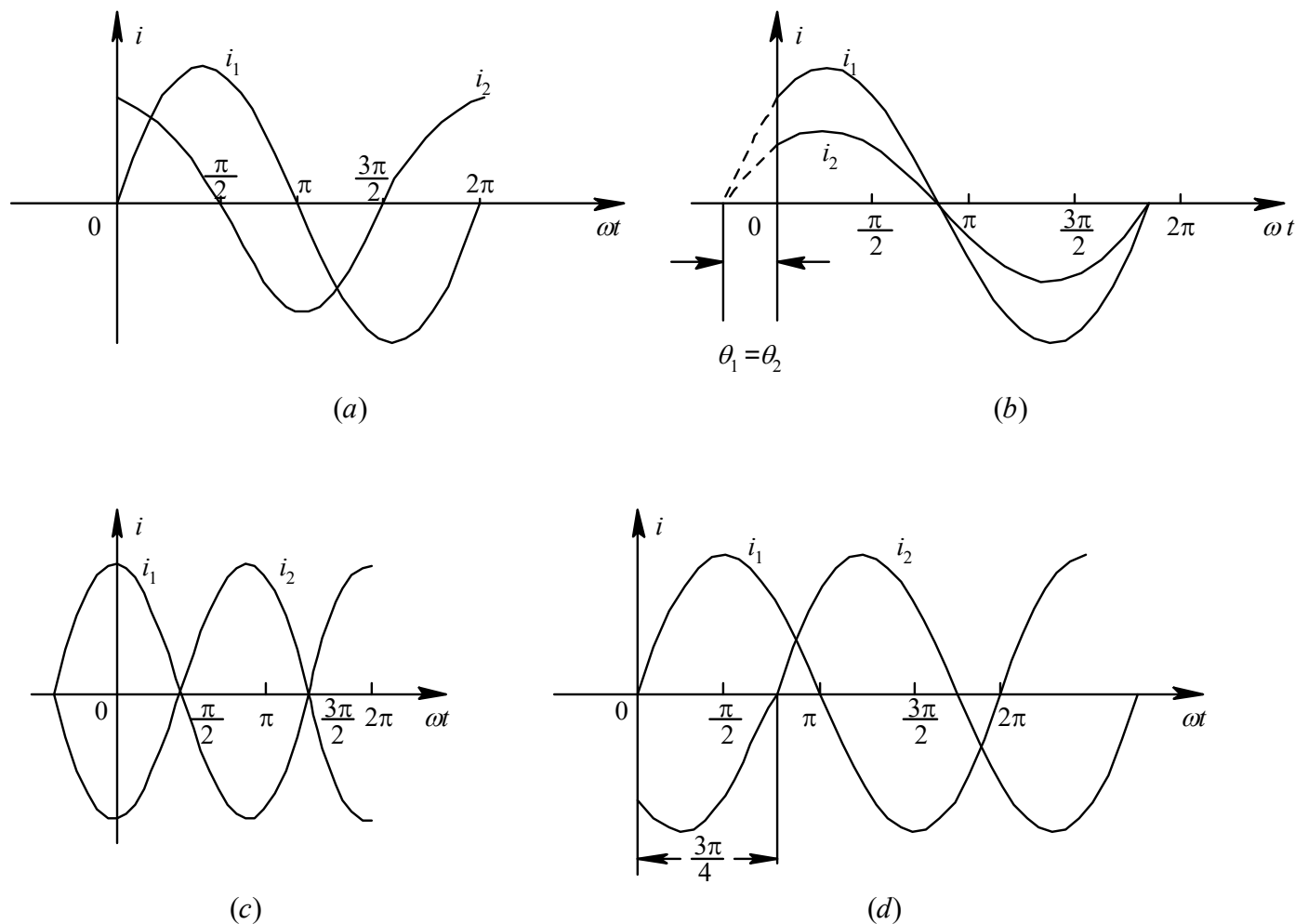


图4.6 例 4.5 图



例 4.5 (三)

解 (a) 由图知 $\theta_1=0$, $\theta_2=90^\circ$, $\varphi_{12}=\theta_1-\theta_2=-90^\circ$, 表明 i_1 滞后于 i_2 90° 。

(b) 由图知 $\theta_1=\theta_2$, $\varphi_{12}=\theta_1-\theta_2=0$, 表明二者同相。



例 4.5 (四)

(c) 由图知 $\theta_1 - \theta_2 = \pi$, 表明二者反相。

(d) 由图知 $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = -\frac{3\pi}{4}$, $\varphi_{12} = \theta_1 - \theta_2 = \frac{3\pi}{4}$, 表明 i_1 超前于 $i_2 \frac{3\pi}{4}$ 。

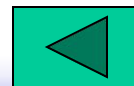


例4.6 (一)

已知

$$u_1 = 220\sqrt{2} \sin(\omega t + 120^\circ) V,$$
$$u_2 = 220\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) V,$$

试分析二者的相位关系。





例4.6 (二)

解 u_1 的初相为 $\theta_1=120^\circ$, u_2 的初相为 $\theta_2=-90^\circ$, u_1 和 u_2 的相位差为

$$\varphi_{12}=\theta_1-\theta_2=120^\circ -(-90^\circ)=210^\circ$$

考虑到正弦量的一个周期为 360° , 故可以将 $\varphi_{12}=210^\circ$ 表示为 $\varphi_{12}=-150^\circ < 0$, 表明 u_1 滞后于 u_2 150° 。



教学方法

结合数学中的正弦曲线来讲本节内容



思考题

1、已知 $i = 10\sqrt{2} \sin(3140t - 240^\circ) A$,

则 $I_m = \underline{\hspace{2cm}} A$, $\omega = \underline{\hspace{2cm}} \text{rad/s}$, $f = \underline{\hspace{2cm}} \text{Hz}$, $T = \underline{\hspace{2cm}} \text{s}$, $\theta_i = \underline{\hspace{2cm}} \text{弧度}$ 。

2、一个工频正弦电压的最大值为311V，在 $t=0$ 时的值为-220V，试求它的解析式。

3、三个正弦量 i_1 、 i_2 和 i_3 的最大值分别为1A、2A和3A。若 i_3 的初相角为 60° ， i_1 较 i_2 超前 30° ，较 i_3 滞后 150° ，试分别写出这三个电流的解析式（设正弦量的角频率为 ω ）。



4.2 正弦量的有效值



目的与要求

会计算正弦量的有效值



重点与 难点

重点：有效值

难点：有效值



4.2.1 有效值的定义（一）

交流电的有效值是根据它的热效应确定的。交流电流 i 通过电阻 R 在一个周期内所产生的热量和直流电流 I 通过同一电阻 R 在相同时间内所产生的热量相等, 则这个直流电流 I 的数值叫做交流电流 i 的有效值, 用大写字母表示, 如 I 、 U 等。



4.2.1 有效值的定义（二）

- 1、测量交流电压，交流电流的仪表所指示的数字，电气设备铭牌上的额定值都指的有效值。
- 2、定义交流电流 I 通过电阻 R 在一个周期内所产生的热量和 直流 I 通过同一电阻 R 在相同时间内所产生的热量相等，则这个直流电流 I 的数值叫做交流 I 的有效值



4.2.1 有效值的定义（三）

一个周期内直流电通过电阻R所产生的热量为：

$$Q = I^2 R T$$

$$Q = \int_0^T i^2 R \, dt$$

交流电通过同样的电阻R，在一个周期内所产生热量：

$$I^2 R T = \int_0^T i^2 R \, dt$$

根据定义，这两个电流所产生的热量应相等，即

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 \, dt}$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 \, dt}$$



4.2.2 正弦量的有效值

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt} \\ &= \sqrt{\frac{I_m^2}{2T} \left(\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t dt \right)} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2T} (T - 0)} \end{aligned}$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 I_m$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0.707 U_m$$

$$U_m = 220\sqrt{2} = 311V$$



例 4.7

电容器的耐压值为 250V , 问能否用在 220V 的单相交流电源上?

解: 因为 220V 的单相交流电源为正弦电压, 其振幅值为 311 V , 大于其耐压值 250V , 电容可能被击穿, 所以不能接在 220 V 的单相电源上。各种电器件和电气设备的绝缘水平(耐压值), 要按最大值考虑。

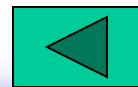


例 4.8

一正弦电压的初相为 60° ，有效值为 100V ，试求它的解析式。

解 因为 $U=100\text{V}$ ，所以其最大值为 $100\sqrt{2}\text{V}$
则电压的解析式为

$$u = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 60^\circ)\text{V}$$





教学方法

- 1、以例题的错误解法加强学生对超前滞后关系的正确判断方法。
- 2、通过提问照明线路的有效值220V来加强学生对有效值的理解。



思考题

1、用电流表测得一正弦交流电路中的电流为10A，则其最大值 $I_m = \underline{\hspace{2cm}}$ A。

2、一正弦电压的初相为 60° ，在 $t=T/2$ 时的值为 -465.4V ，试求它的有效值和解析式。



4.3 正弦量的相量表示法



目的与要求

会对正弦量进行相量表示



重点与难点

重点：相量表示

难点：相量表示



4.3.1 复数及四则运算（一）

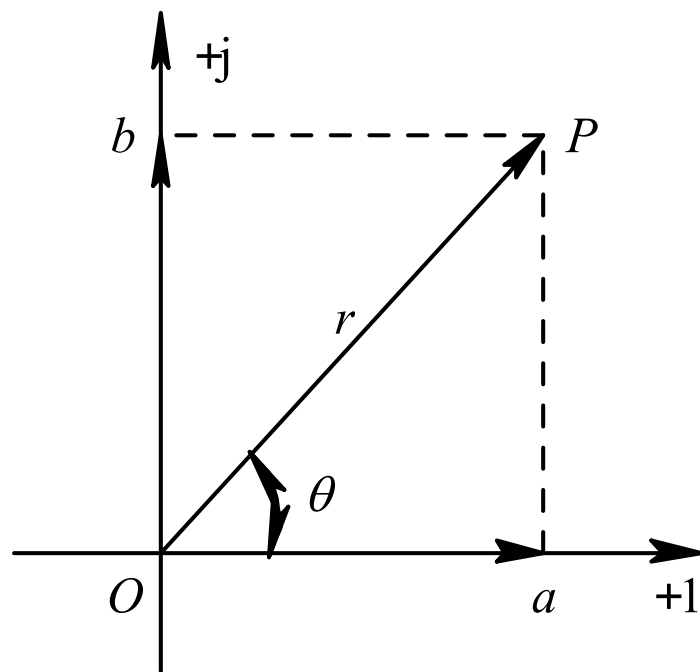
1. 复数

$$A = a + jb$$

$$r = |A| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{b}{a} \quad (\theta \leq 2\pi)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= r \cos \theta \\ b &= r \sin \theta \end{aligned} \right\}$$





4.3.1 复数及四则运算（二）

2. 复数的四种形式

(1) 复数的代数形式

$$A = a + jb$$

(2) 复数的三角形式

$$A = r \cos \theta + jr \sin \theta$$

(3) 复数的指数形式

$$A = re^{j\theta}$$

(4) 复数的极坐标形式

$$A = r \angle \theta$$



例 4.9

写出复数 $A_1=4-j3$, $A_2=-3+j4$ 的极坐标形式。

解 A_1 的模

$$r_1 = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

辐角 $\theta_1 = \arctan \frac{-3}{4} = -36.9^\circ$ (在第四象限)

则 A_1 的极坐标形式为 $A_1 = 5 \angle -36.9^\circ$

A_2 的模 $r_2 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

辐角 $\theta_2 = \arctan \frac{-4}{3} = 126.9^\circ$ (在第二象限)

则 A_2 的极坐标形式为 $A_2 = 5 \angle 126.9^\circ$



例 4.10

写出复数 $A=100\angle 30^\circ$ 的三角形式和代数形式。

解： 三角形式 $A=100 (\cos 30^\circ + j\sin 30^\circ)$

代数形式 $A=100(\cos 30^\circ + j\sin 30^\circ)=86.6+j50$

4.3.1 复数及四则运算（三）

3. 复数的四则运算

(1) 复数的加减法

$$\begin{aligned}\text{设 } A_1 &= a_1 + jb_1 = r_1 \angle \theta_1 \\ A_2 &= a_2 + jb_2 = r_2 \angle \theta_2\end{aligned}$$

$$\text{则 } A_1 \pm A_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

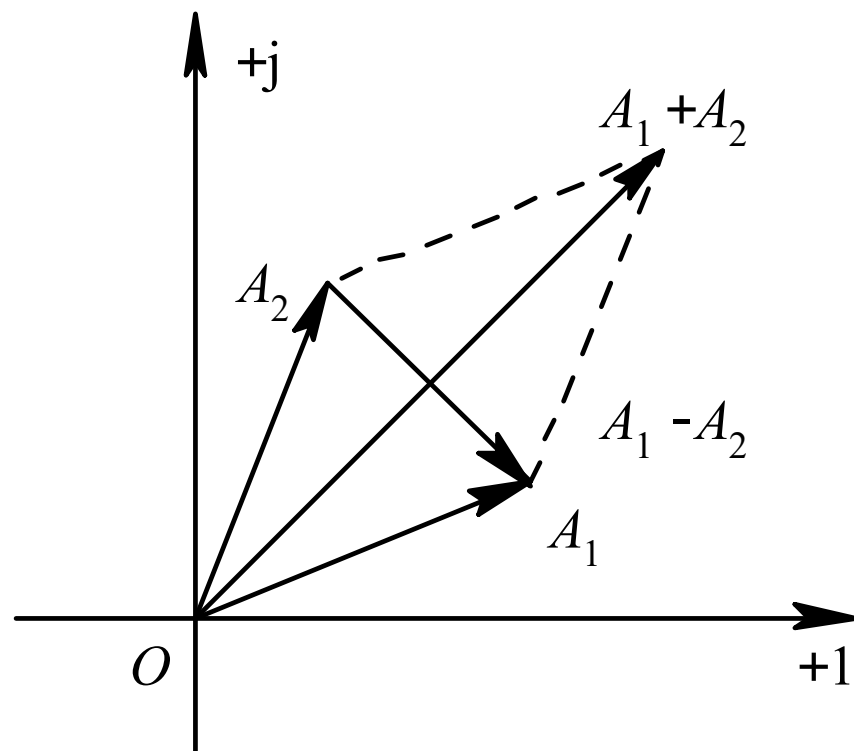


图4.9 复数相加减矢量图



4.3.1 复数及四则运算（四）

(2) 复数的乘除法

$$A \cdot B = r_1 \angle \theta_1 \cdot r_2 \angle \theta_2 = r_1 \cdot r_2 \angle \theta_1 + \theta_2$$

$$\frac{A}{B} = \frac{r_1 \angle \theta_1}{r_2 \angle \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \theta_1 - \theta_2$$



例 4.11

求复数 $A=8+j6$, $B=6-j8$ 之和 $A+B$ 及积 $A \cdot B$ 。

解: $A+B= (8+j6)+(6-j8)=14-j2$

$$A \cdot B=(8+j6)(6-j8)=10/36.9^\circ \cdot 10$$

$$\angle -53.1^\circ = 100 \angle -16.2^\circ$$

4.3.2 正弦量的相量表示法

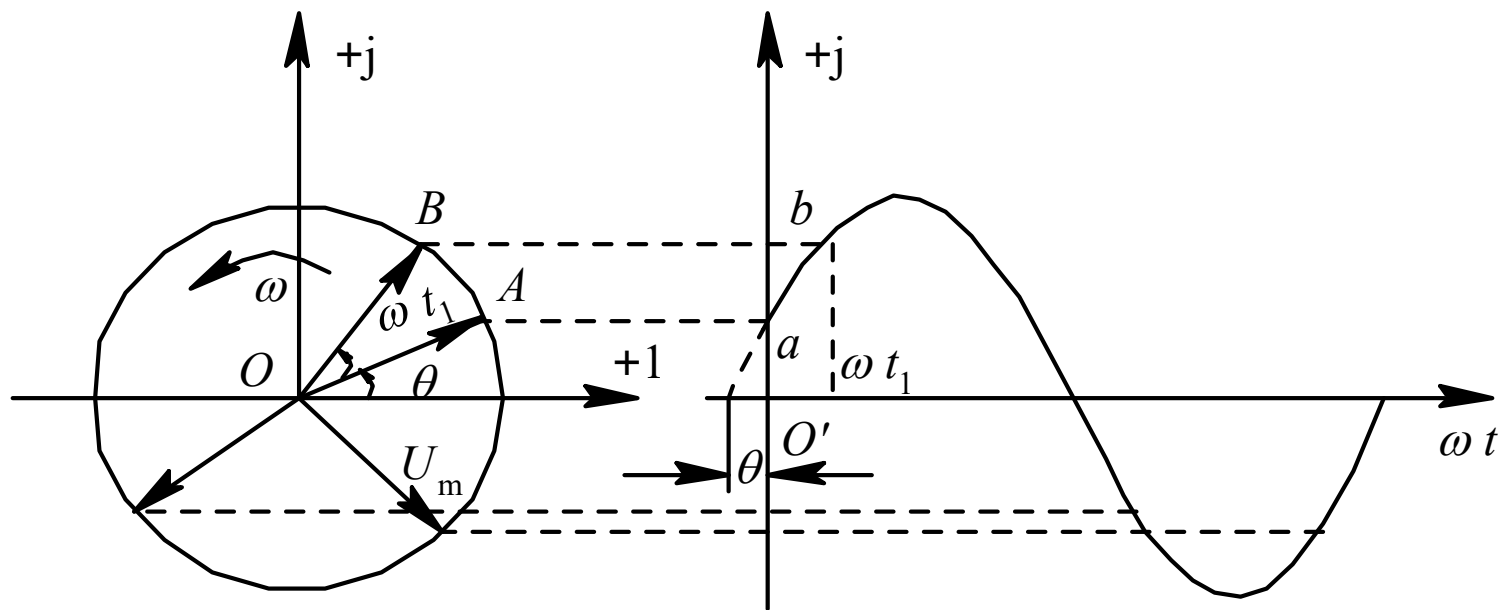


图4.10 正弦量的复数表示

$$\begin{aligned}
 U_m e^{j\theta} \cdot e^{j\omega t} &= U_m e^{j(\omega t + \theta)} \\
 &= U_m \cos(\omega t + \theta) + jU_m \sin(\omega t + \theta)
 \end{aligned}$$

$$\dot{U} = U \angle \theta$$



例 4.12 (一)

已知同频率的正弦量的解析式分别为

$$i=10\sin(\omega t+30^\circ), \quad u=220\sqrt{2}\sin(\omega t-45^\circ), \quad \text{写}$$

出电流和电压的相量 $\dot{I}$ 、 $\dot{U}$, 并绘出相量图。

解 由解析式可得



例 4.12 (二)

$$\dot{I} = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ = 5\sqrt{2} \angle 30^\circ A$$

$$\dot{U} = \frac{220\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ V$$

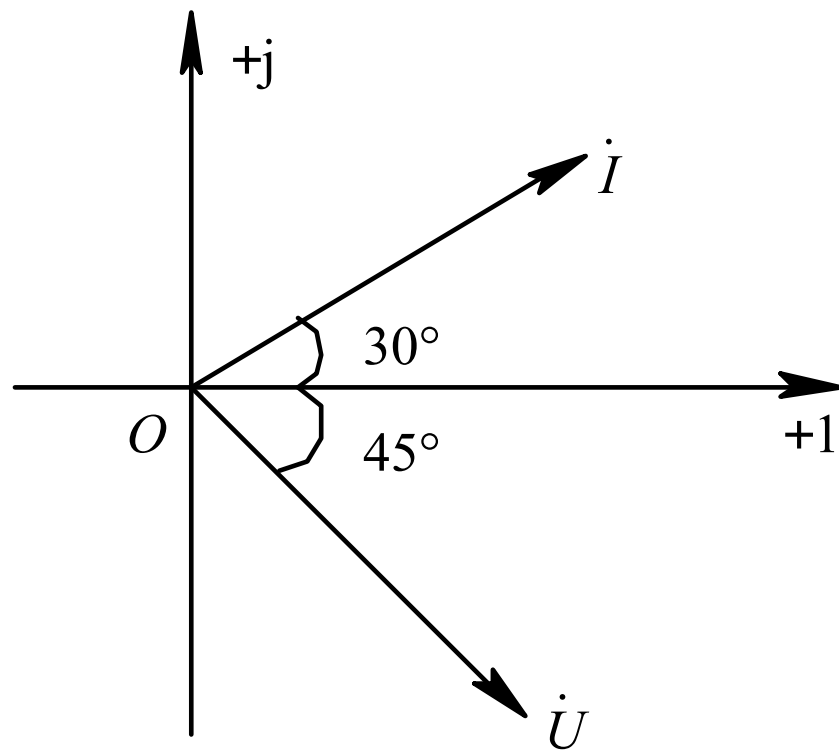


图 4.11 例 4.12 图

相量图如图4.11所示。



例 4.13 (一)

已知工频条件下, 两正弦量的相量分别为

$$\dot{U}_1 = 10\sqrt{2} \angle 60^\circ V, \dot{U}_2 = 20\sqrt{2} \angle -30^\circ V$$

试求两正弦电压的解析式。



例 4.13 (二)

解 由于

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 100\pi \text{ rad/s}$$

$$U_1 = 10\text{V}, \quad \theta_1 = 60^\circ$$

$$U_2 = 20\sqrt{2}\text{V}, \quad \theta_2 = -30^\circ$$

所以

$$u_1 = \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t + \theta_1) = 10\sin(100\pi t + 60^\circ)\text{V}$$

$$u_2 = \sqrt{2}U_2 \sin(\omega t + \theta_2) = 40\sin(100\pi t - 30^\circ)\text{V}$$



教学方法

以复习数学中的有关知识来讲



思考题（一）

1、写出下列各正弦量对应的向量，并绘出向量图。

$$(1) u_1 = 220\sqrt{2} \sin(\omega t + 100^\circ) V$$

$$(2) u_2 = 110\sqrt{2} \sin(\omega t - 240^\circ) V$$

$$(3) i_1 = 10\sqrt{2} \cos(\omega t + 30^\circ) A$$

$$(4) i_2 = 14.14 \sin(\omega t - 90^\circ) A$$



思考题（二）

2、写出下列向量对应的解析式 ($f=50\text{Hz}$)。

$$(1) \dot{I}_1 = 5/\underline{45^\circ} A$$

$$(2) \dot{I}_2 = j10 A$$

$$(3) \dot{I}_3 = -10/\underline{30^\circ} A$$

$$(4) \dot{U}_1 = 380/\underline{240^\circ} V$$

$$(5) \dot{U}_2 = 100 + j100\sqrt{3} V$$

$$(6) \dot{U}_3 = 220/\underline{40^\circ}$$



思考题（三）

3、已知 $u_1 = 100\sqrt{2} \sin \omega t V$, $u_2 = 220\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ) V$, 如图4.12所示, 判断下列表达式的正误。

(1) $u = u_1 + u_2$

(2) $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$

(3) $U = U_1 + U_2$

(4) $U_m = U_{m1} + U_{m2}$



4.4 正弦电路中的电阻元件



目的与要求

会分析正弦电路中的电阻元件



重点与 难点

重点： 电阻元件上的电压和电流的关系

难点： 电阻元件的相量关系



4.4.1 电阻元件上电压与电流的关系 (一)

1) 电阻元件上电流和电压之间的瞬时关系

$$\dot{i}_R = \frac{u_R}{R}$$

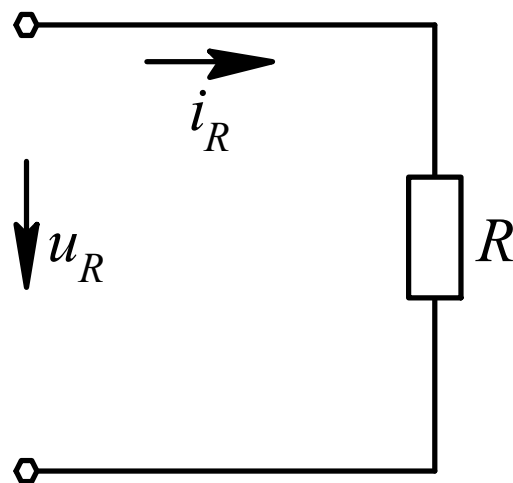


图 4.13 纯电阻电路



4.4.1 电阻元件上电压与电流的关系 (二)

2) 电阻元件上电流和电压之间的大小关系

若

$$u_R = U_{Rm} \sin(\omega t + \theta)$$

则

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{U_{Rm}}{R} \sin(\omega t + \theta) = I_{Rm} \sin(\omega t + \theta)$$

其中

$$I_{Rm} = \frac{U_{Rm}}{R} \quad \text{或} \quad U_{Rm} = I_{Rm} \cdot R$$

$$I_R = \frac{U_R}{R}$$



4.4.1 电阻元件上电压与电流的关系 (三)

3) 电阻元件上电流和电压之间的相位关系

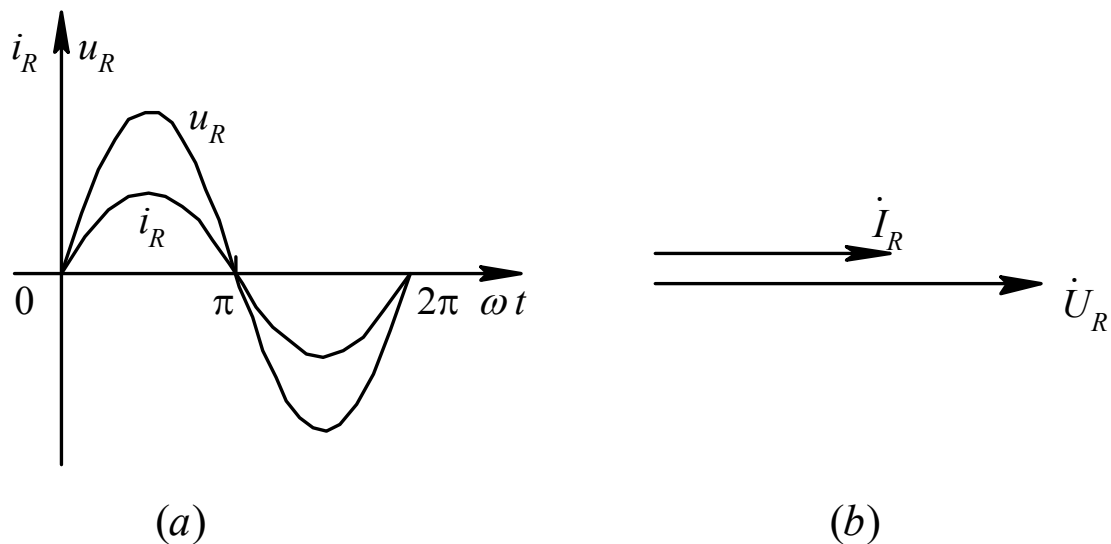


图4.14 电阻元件上电流与电压之间的关系



4.4.2 电阻元件上电压与电流的相量关系

关联参考方向下

若 $i_R = I_{Rm} \sin(\omega t + \theta)$

则 $\dot{I}_R = I_R \angle \theta$

$$u_R = U_{Rm} \sin(\omega t + \theta)$$

$$\dot{U}_R = U_R \angle \theta = I_R \cdot R \angle \theta$$

$$\dot{U}_R = \dot{I}_R R$$

4.4.3 电阻元件的功率（一）

1、瞬时功率：交流电路中,任一瞬间,元件上电压的瞬时值与电流的瞬时值的乘积叫做该元件的瞬时功率,用小写字母 p 表示,即

$$p = ui$$

$$\begin{aligned} p_R &= u_R i_R = U_{Rm} \sin \omega t \cdot I_{Rm} \sin \omega t \\ &= U_{Rm} I_{Rm} \sin^2 \omega t = \frac{U_{Rm} I_{Rm}}{2} (1 - \cos 2\omega t) \\ &= U_R I_R (1 - \cos 2\omega t) \end{aligned}$$



4.4.3 电阻元件的功率（二）

2、平均功率：工程上都是计算瞬时功率的平均值，即平均功率，用大写字母 P 表示。周期性交流电路中的平均功率就是其瞬时功率在一个周期内的平均值，即



4.4.3 电阻元件的功率（三）

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_R I_R (1 - \cos 2\omega t) dt$$

$$= \frac{U_R I_R}{T} \left(\int_0^T 1 dt - \int_0^T \cos 2\omega t dt \right)$$

$$= \frac{U_R I_R}{T} (T - 0) = U_R I_R$$

$$P = U_R I_R = I_R^2 R = \frac{U_R^2}{R}$$

功率的单位为瓦(W)，工程上也常用千瓦(kW)，
即

$$1kW = 1000W$$

例4.14 (一)

一电阻 $R=100\Omega$, R 两端的电压 $u_R = 100\sqrt{2} \sin(\omega t - 30^\circ)$

求 (1) 通过电阻 R 的电流 I_R 和 i_R 。

(2) 电阻 R 接受的功率 P_R 。

(3) 作 $\dot{U}_R$ 、 $\dot{I}_R$ 的相量图。



例4.14 (二)

解 (1) 因为

$$\begin{aligned} i_R &= \frac{u_R}{R} = \frac{100\sqrt{2} \sin(\omega t - 30^\circ)}{100} \\ &= \sqrt{2} \sin(\omega t - 30^\circ) A \end{aligned}$$

所以
$$I_R = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 A$$

(2) 或 $P_R = U_R I_R = 100 \times 1 = 100 W$ 或 $P_R^2 R = 1^2 \times 100 = 100 W$

(3) 相量图如图4.16所示。

例4.14 (三)

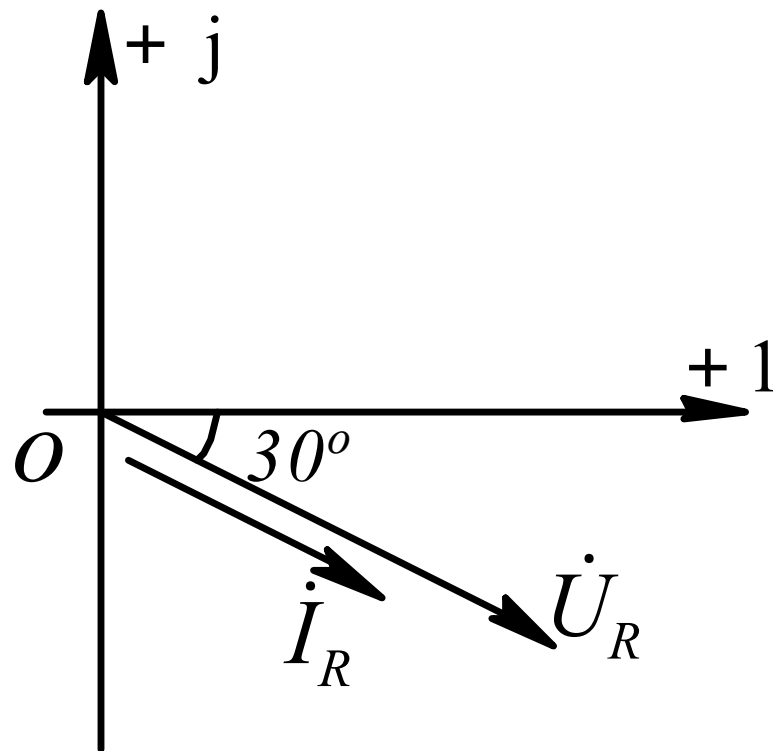


图 4.16 例 4.14 图



第4章 正弦交流电路

例4.15

(一) 一只额定电压为220V, 功率为100W的电烙铁, 误接在380V的交流电源上, 问此时它接受的功率为多少? 是否安全? 若接到110V的交流电源上, 它的功率又为多少?

解 由电烙铁的额定值可得

$$R = \frac{U_R^2}{P} = \frac{220^2}{100} = 484\Omega$$

当电源电压为 380V时, 电烙铁的功率为

$$P_1 = \frac{U_R^2}{P} = \frac{380^2}{484} = 298W > 100W$$

此时不安全, 电烙铁将被烧坏。

当接到110 V的交流电源上, 此时电烙铁的功率为

$$P_2 = \frac{U_R^2}{R} = \frac{110^2}{484} = 25W < 100W$$

此时电烙铁达不到正常的使用温度。



例4.15 (二)

解 由电烙铁的额定值可得

$$R = \frac{U_R^2}{P} = \frac{220^2}{100} = 484\Omega$$

当电源电压为 380V 时, 电烙铁的功率为

$$P_1 = \frac{U_R^2}{P} = \frac{380^2}{484} = 298W > 100W$$

此时不安全, 电烙铁将被烧坏。



例4.15（三）

当接到110 V的交流电源上, 此时电烙铁的功率为

$$P_2 = \frac{U_R^2}{R} = \frac{110^2}{484} = 25W < 100W$$

此时电烙铁达不到正常的使用温度。



教学方法

讲授法



思考题（一）

1、以知电阻 $R=10\Omega$ ，关联参考方向下，通过电阻的电流 $i=1.41\sin(t+60^\circ)\text{A}$ 。求

(1) u_R 及 U_R 。

(2) 电阻接受的功率 P 。

2、一电阻 R 接到 $f=50\text{Hz}$ ， $\dot{U}=100\angle-60^\circ\text{V}$ 的电源上，接受的功率为 200W 。求

(1) 电阻值 R 。

(2) 电流 I_R 。

(3) 作电流、电压向量图。



思考题（二）

3、在图4.17所示电路中，将 $R=100\Omega$ 的电阻接到一正弦电源上，若端电压的最大值为 311V 。试求电流表和电压表的读数。

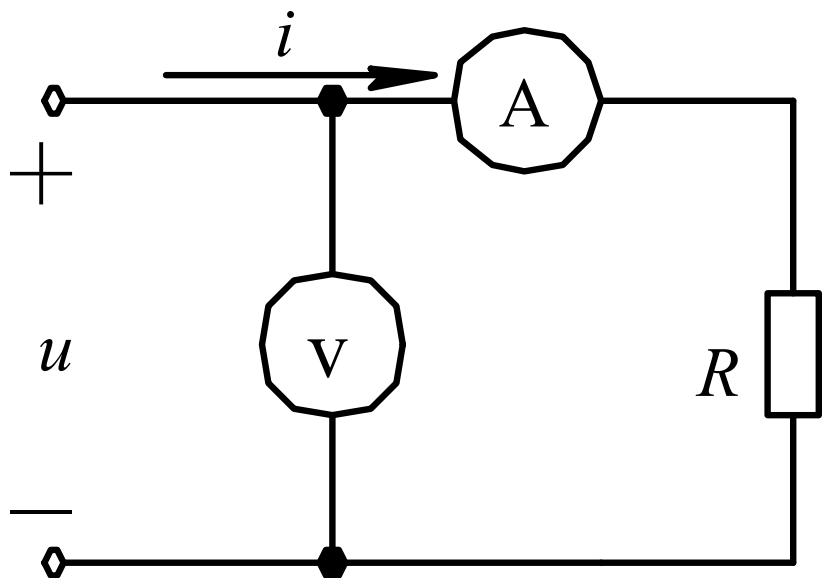


图 4.17 思考题 3 图



4.5 正弦电路中的电感元件



目的与要求

掌握正弦电路中电感元件上电压（电流）
及功率的计算



重点与 难点

重点： 电感元件上的电压和电流的关系

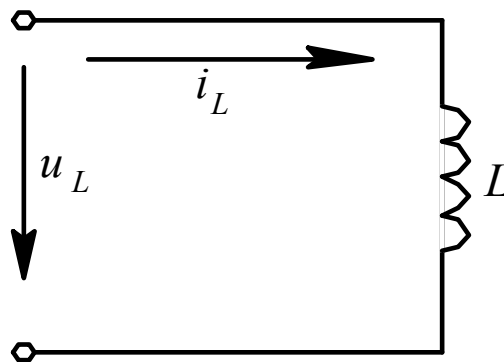
难点： 电感元件的向量关系



4.5.1 电感元件上电压和电流的关系 (一)

1、瞬时关系

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$





4.5.1 电感元件上电压和电流的关系 (二)

$$i_L = I_{Lm} \sin(\omega t + \theta_i)$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = \omega L I_{Lm} \cos(\omega t + \theta_i) = U_{Lm} \sin(\omega t + \theta_u + \frac{\pi}{2})$$



4.5.1 电感元件上电压和电流的关系 (三)

$$U_{Lm} = I_{Lm} \omega L \quad \text{或} \quad U_L = I_L \omega L$$

$$X_L = \omega L = 2\pi fL$$

X_L 称为感抗,当 ω 的单位为1/s, L 的单位为H时,
 X_C 的单位为 Ω 。



4.5.1 电感元件上电压和电流的关系 (四)

3. 相位关系

$$\theta_u = \theta_i + \frac{\pi}{2}$$

电感元件上电压较电流超前 90°

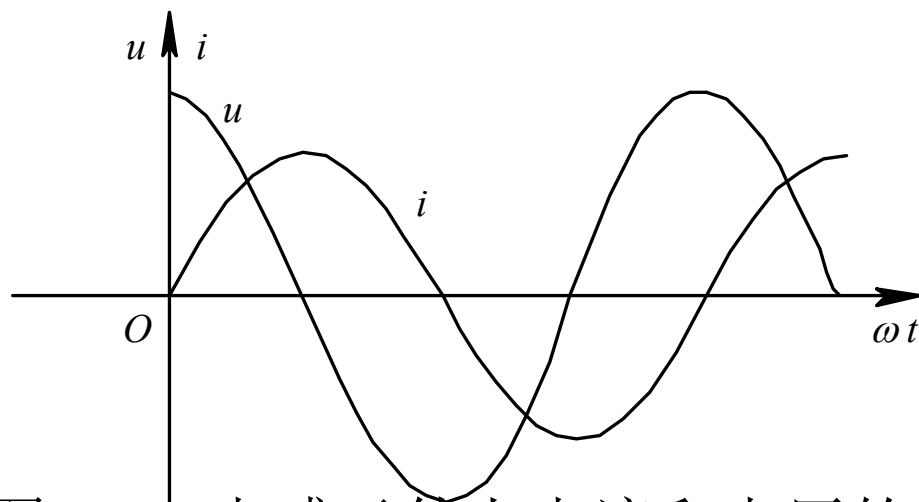


图4.19 电感元件上电流和电压的波形图



4.5.2 电感元件上电压和电流的相量关系（一）

关联参考下 $i_L = I_{Lm} \sin(\omega t + \theta_i)$

$$\dot{I}_L = I_L \angle \theta_i$$

$$u_L = I_{Lm} \omega L \sin(\omega t + \frac{\pi}{2} + \theta_i)$$

$$\dot{U}_L = I_L \omega L \angle \theta_i + \frac{\pi}{2} = j\omega L I_L \angle \theta_i$$

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L = jX_L \dot{I}_L$$



4.5.2 电感元件上电压和电流的相量关系（二）

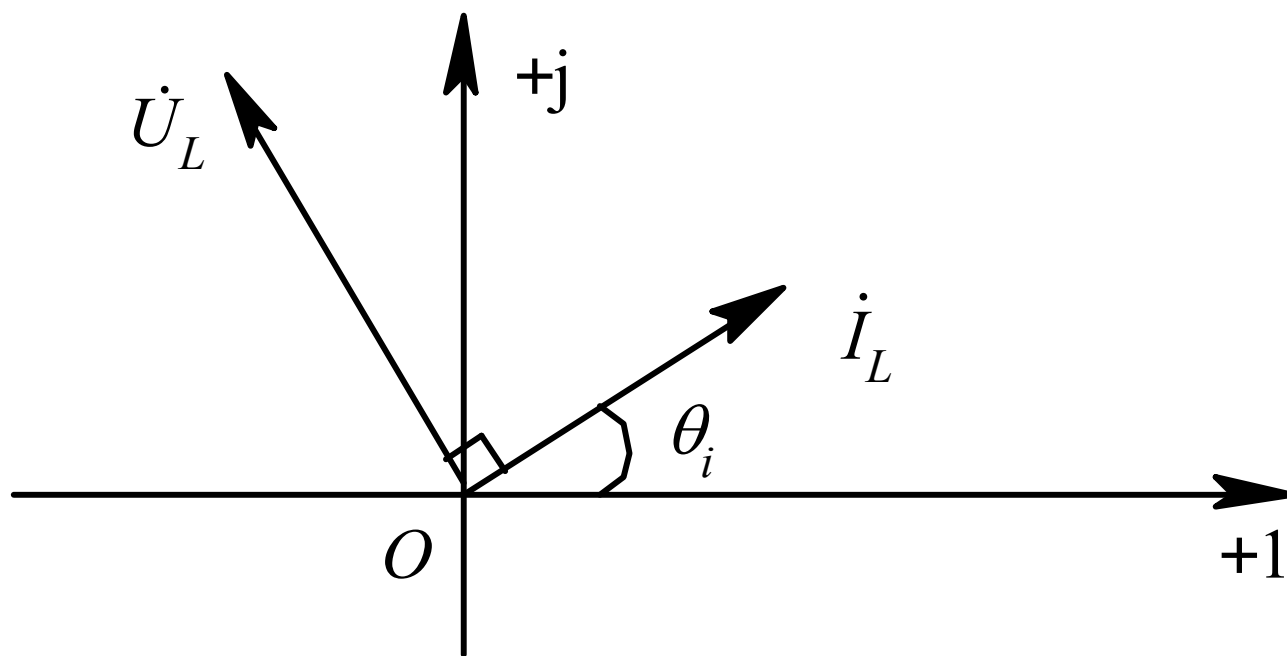


图4.20 电感元件电流和电压的相量图

4.5.3 电感元件的功率（一）

1、瞬时功率

设通过电感元件的电流为

$$i_L = I_{Lm} \sin \omega t$$

则

$$u_L = U_{Lm} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$p = u_L \cdot i_L = U_{Lm} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \cdot I_{Lm} \sin \omega t$$

$$= \frac{1}{2} I_{Lm} U_{Lm} \sin 2\omega t$$

$$= I_L U_L \sin 2\omega t$$



4.5.3 电感元件的功率（二）

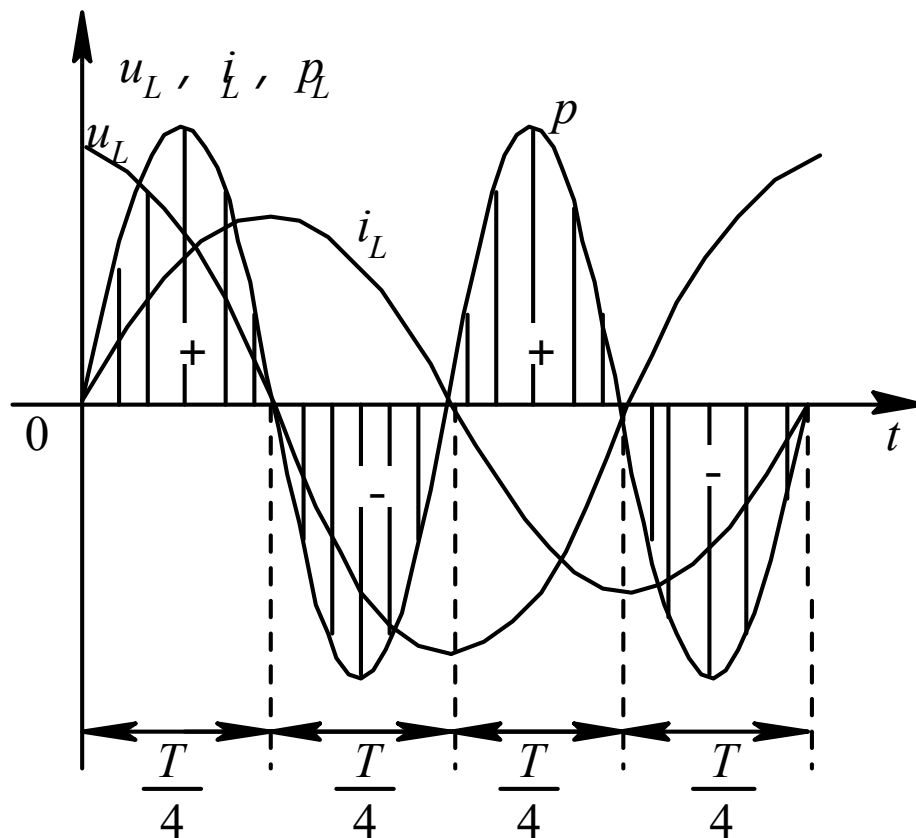


图 4.21 电感元件的功率曲线



4.5.3 电感元件的功率（三）

2、平均功率

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T u_L i_L \sin 2\omega t \, dt = 0$$



4.5.3 电感元件的功率（四）

3、无功功率

我们把电感元件上电压的有效值和电流的有效值的乘积叫做电感元件的无功功率, 用 Q_L 表示。

$$Q_L = U_L I_L = I_L^2 X_L = \frac{U_L^2}{X_L}$$

$Q_L > 0$, 表明电感元件是接受无功功率的。

无功功率的单位为“乏”（var）, 工程中也常用“千乏”（kvar）。

$$1 \text{ kvar} = 1000 \text{ var}$$



例 4.16

已知一个电感 $L=2\text{H}$, 接在 $u_L = 220\sqrt{2} \sin(314t - 60^\circ)\text{V}$ 的电源上, 求 (1) X_L 。 (2) 通过电感的电流 i_L 。
(3) 电感上的无功功率 Q_L 。

解 (1) $X_L = \omega L = 314 \times 2 = 628\Omega$

$$(2) \quad \dot{I}_L = \frac{\dot{U}_L}{jX_L} = \frac{220 \angle -60^\circ}{628j} = 0.35 \angle -150^\circ \text{A}$$

$$i_L = 0.35\sqrt{2} \sin(314t - 150^\circ) \text{A}$$

$$(3) \quad Q_L = UI = 220 \times 0.35 = 77 \text{ var}$$



例 4.17

已知流过电感元件中的电流为 $i_L = 10\sqrt{2} \sin(314t + 30^\circ) A$

测得其无功功率 $Q_L = 500 \text{ var}$, 求:

(1) X_L 和 L 。 (2) 电感元件中储存的最大磁场能量 W_{Lm} 。

解 (1)
$$X_L = \frac{Q}{I_L^2} = \frac{500}{10^2} = 5 \Omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{5}{314} = 15.9 \text{ mH}$$

$$(2) \quad W_{Lm} = \frac{1}{2} L I_{Lm}^2 = \frac{1}{2} \times 15.9 \times 10^{-3} \times (10\sqrt{2})^2 = 1.59 \text{ J}$$



教学方法

要多次强调电感元件上电压、电流间的相位关系



思考题（一）

1、判断下列表达式的正（√）误（×）：（选定电感元件的电流与电压为关联参考方向）

(1) $u_L = \omega L I_L$ ()

(2) $U_L = \omega L I_L$ ()

(3) $u_L = \omega L \dot{i}_L$ ()

(4) $\dot{I}_L = \frac{U_L}{j\omega L}$ ()

2、已知 $u_L = 220\sqrt{2} \sin(1000t + 30^\circ) V$ ， $L = 0.1 H$ 。

试求 X_L 和 $\dot{I}_L$ 并绘出电压、电流向量图。



思考题（二）

3、已知 $\dot{U}_L = 20 \angle 36.9^\circ V$, $\dot{I}_L = 5 \angle -53.1^\circ A$,
 $f = 50 \text{ Hz}$, 求 X_L 和 L 。

4、一电感 $L = 0.127 \text{ H}$, $u_L = 220\sqrt{2} \sin(314t + 30^\circ) V$,
求

- (1) 电流 I_L 。
- (2) 有功功率 P_L 。
- (3) 无功功率 Q_L 。



4.6 正弦电路中的电容元件



目的与要求

掌握正弦电路中电 容元件上电压（电流）
及功率的计算



重点与 难点

重点： 电容元件上的电压和电流的关系

难点： 电容元件的向量关系



4.6.1 电容元件上电压和电流的关系 (一)

1、瞬时关系

关联参考方向下

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

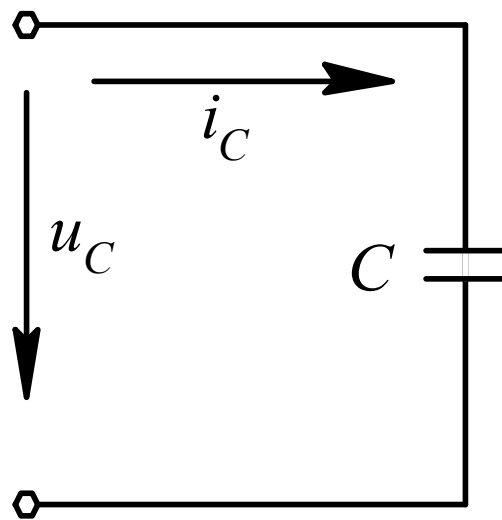


图 4.22 纯电容电路



4.6.1 电容元件上电压和电流的关系 (二)

2、大小关系

设

$$u_C = U_{Cm} \sin(\omega t + \theta_u)$$

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = \omega C U_{Cm} \cos(\omega t + \theta_u) = \omega C U_{Cm} \sin(\omega t + \theta_u + \frac{\pi}{2})$$

$$i_C = I_{Cm} \sin(\omega t + \theta_u + \frac{\pi}{2}) = I_{Cm} \sin(\omega t + \theta_u + \frac{\pi}{2})$$

$$i_C = I_{Cm} \sin(\omega t + \theta_u + \frac{\pi}{2}) = I_{Cm} \sin(\omega t + \theta_i)$$



4.6.1 电容元件上电压和电流的关系 (三)

其中

$$I_{Cm} = \omega C U_{Cm}$$

$$I_C = \omega C U_C = \frac{U_C}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U_C}{X_C}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$

X_C 称为容抗, 当 ω 的单位为1/s, C 的单位为F时, X_C 的单位为 Ω

4.6.1 电容元件上电压和电流的关系 (四)

3、相位关系 $\theta_i = \theta_u + \frac{\pi}{2}$

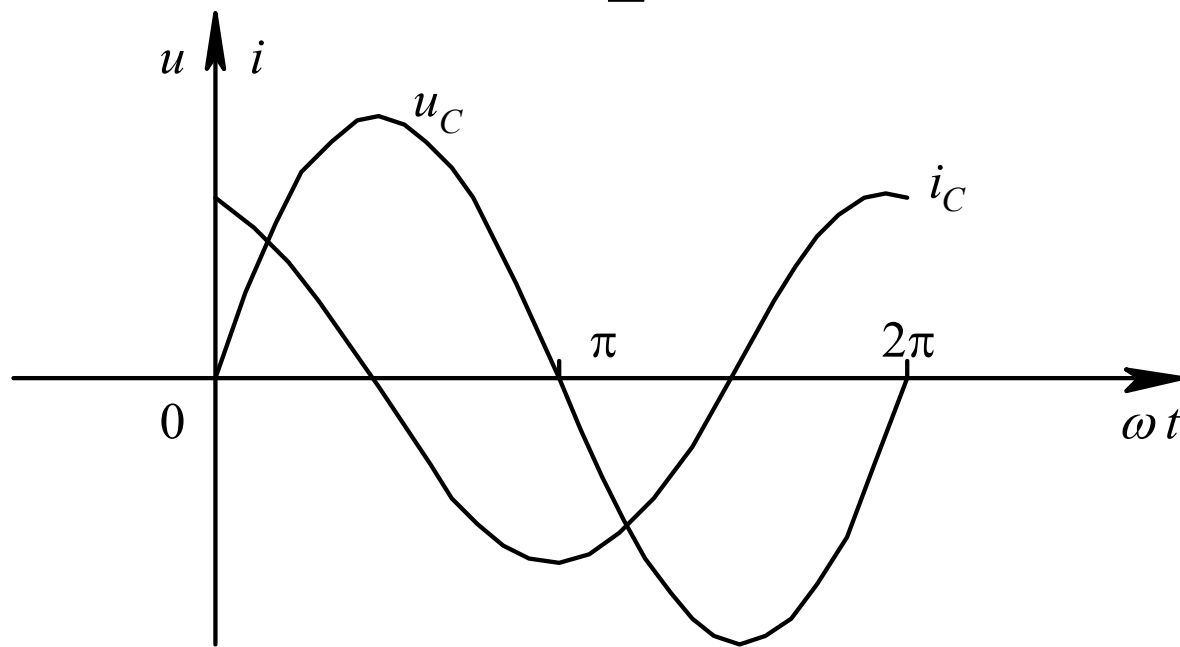


图4.23 电容元件上电流和电压的波形图

4.6.2 电容元件上电压与电流的相量关系

$$u_C = U_{Cm} \sin(\omega t + \theta_u)$$

$$\dot{U}_C = U_C \angle \theta_u$$

$$i_C = I_{Cm} \sin(\omega t + \theta_u + \frac{\pi}{2})$$

$$\dot{I}_C = I_C \angle \theta_u + \frac{\pi}{2} = \frac{U_C}{X_C} \angle \theta_u + \frac{\pi}{2} = \omega C U_C \angle \theta_u + \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{U}_C = -jX_C \dot{I}_C \text{ 或 } \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{-jX_C}$$



4.6.3 电容元件的功率（一）

1、瞬时功率

$$p = u_C i_C = U_{Cm} \sin \omega t \cdot I_{Cm} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = U_C I_C \sin 2\omega t$$

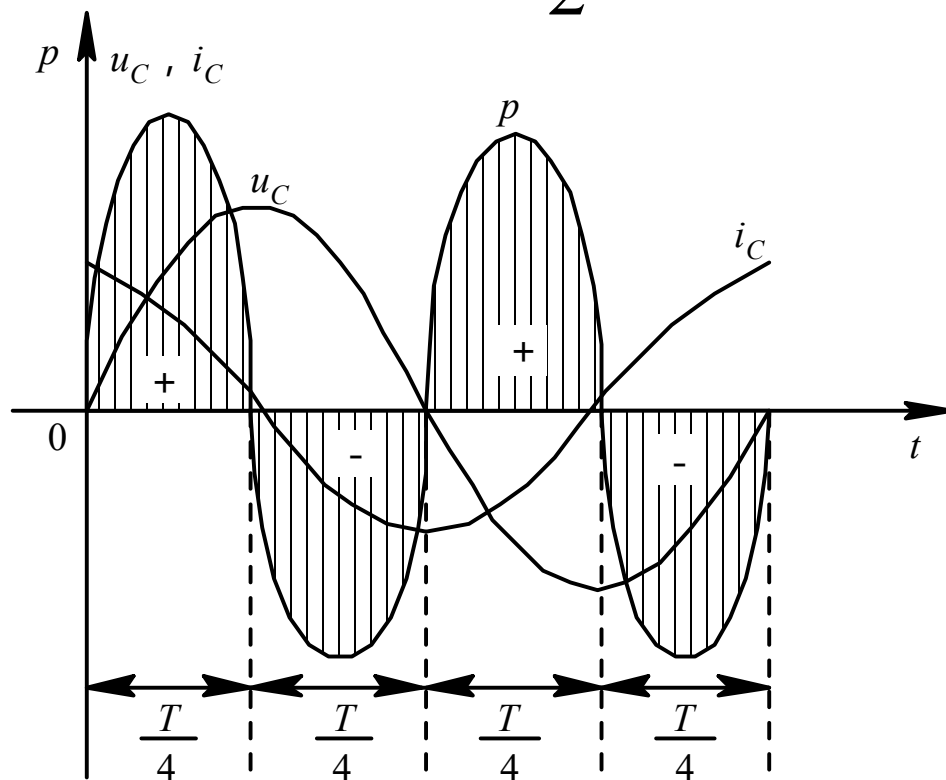


图4.25 电容元件功率曲线



4.6.3 电容元件的功率（二）

2、平均功率

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u_C i_C \sin 2\omega t dt = 0$$



4.6.3 电容元件的功率（三）

3、无功功率：我们把电容元件上电压的有效值与电流的有效值乘积的负值, 称为电容元件的无功功率, 用 Q_C 表示。即

$$Q_C = -U_C I_C = -I_C^2 X_C = -\frac{U_C^2}{X_C}$$

$Q_C < 0$ 表示电容元件是发出无功功率的, Q_C 和 Q_L 一样, 单位也是乏 (var) 或千乏(kvar)。

第4章 正弦交流电路

例 4.18 (一)



已知一电容 $C=50\mu\text{F}$, 接到 220V , 50Hz 的正弦交流电源上, 求

(1) X_C 。

(2) 电路中的电流 I_C 和无功功率 Q_C 。

(3) 电源频率变为 1000 Hz 时的容抗。



例 4.18 (二)

解 (1)
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 50 \times 10^{-6} \times 50} = 63.7 \Omega$$

(2)
$$I_C = \frac{U_C}{X_C} = \frac{220}{63.7} = 3.45 A$$

$$Q_C = -U_C I_C = -220 \times 3.45 = -759 \text{ var}$$

(3) 当 $f = 1000 \text{ Hz}$ 时

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 1000 \times 50 \times 10^{-6}} = 3.18 \Omega$$



例 4.19 (一)

一电容 $C=100\mu\text{F}$, 接于 $u = 220\sqrt{2} \sin(1000t - 45^\circ)\text{V}$

的电源上。求 (1) 流过电容的电流 I_C 。

(2) 电容元件的有功功率 P_C 和无功功率 Q_C 。

(3) 电容中储存的最大电场能量 W_{Cm} 。

(4) 绘电流和电压的相量图。



例 4.19 (二)

解: (1)

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000 \times 100 \times 10^{-6}} = 10 \Omega$$

$$\dot{U}_C = 220 \angle -45^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{-jX_C} = \frac{220 \angle -45^\circ}{10 \angle -90^\circ} = 22 \angle 45^\circ \text{ A}$$

所以

$$i_C = 22\sqrt{2} \sin(1000t + 45^\circ) \text{ A}$$



例 4.19 (三)

$$(2) \quad P_C = 0$$

$$Q_C = -U_C I_C = -220 \times 22 = -4840 \text{ var}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad W_{Cm} &= \frac{1}{2} C u_{Cm}^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 100 \times 10^{-6} \times (220\sqrt{2})^2 \\ &= 4.84 J \end{aligned}$$



例 4.19 (四)

(4) 相量图如图4.26所示。

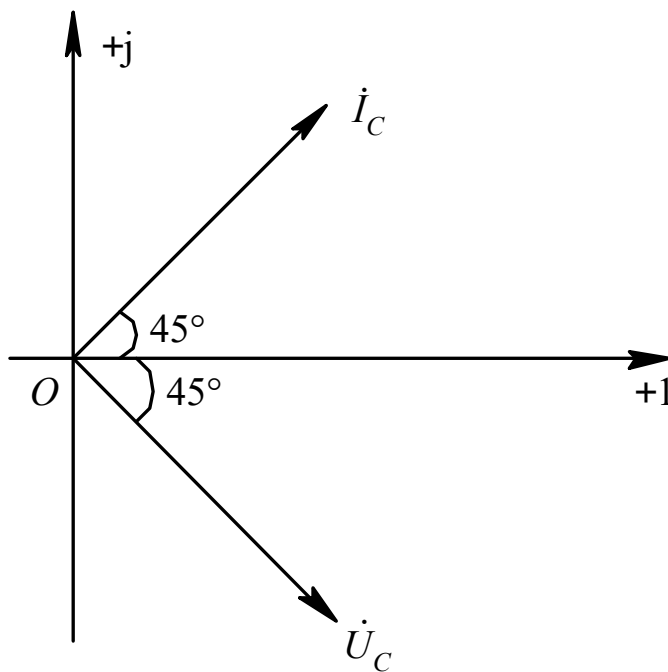
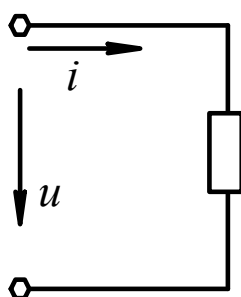
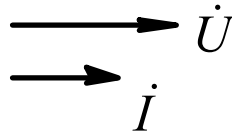
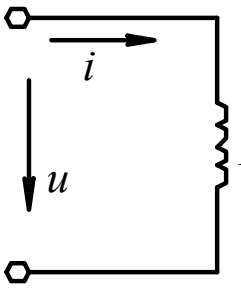
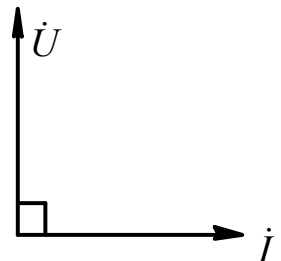
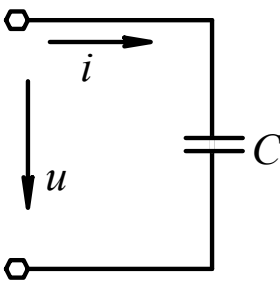
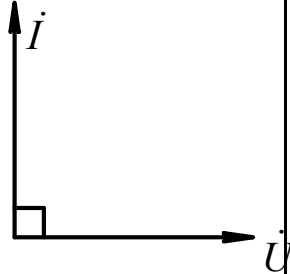


图 4.26 例 4.19 图

总结

电路	电压和电流的大小关系	相位关系	阻抗	功率	相量关系
	$U = IR$ $I = \frac{U}{R}$		电阻R	$P = UI$ $= I^2 R$ $= \frac{U^2}{R}$	$\dot{U} = \dot{I} R$
	$U = I\omega L = IX_L$ $I = \frac{U}{\omega L} = \frac{U}{X_L}$		感抗 $X_L = \omega L$	$P = 0$ $Q_L = I^2 X_L$ $= \frac{U^2}{X_L}$	$\dot{U} = j X_L \dot{I}$
	$U = I \frac{1}{\omega C} = IX_C$ $I = U_{\omega} C = \frac{U}{X_C}$		容抗 $X_C = \frac{1}{\omega C}$	$P = 0$ $Q_C = -I^2 X_C$ $= \frac{U^2}{X_C}$	$\dot{U} = -j X_C \dot{I}$



教学方法

将电容元件上的电压电流关系与电感元件上的电压电流关系比较着讲解。



思考题（一）

1、判断下列表达式的正（√）误（×）：（电容元件的电流与电压为关联参考方向）

$$(1) \quad i_C = \frac{u_C}{C} \quad (\quad)$$

$$(2) \quad I_C = \frac{U_C}{\omega C} \quad (\quad)$$

$$(3) \quad i_C = \frac{U_C}{X_C} \quad (\quad)$$

$$(4) \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{X_C} j \quad (\quad)$$



思考题（二）

2、一电容 $C=31.8\text{F}$ ，外加电压为

$u = 10\sqrt{2} \sin(314t - 60^\circ)\text{V}$ ，在电压和电流为关联参考方向时，求 X_C 、 $\dot{I}$ 、 i_C 、 Q_C ，并作出相量图。



思考题（三）

3、一高压电缆的电容 $C=10\text{F}$ ，外加电压为

$u = 10\sqrt{2} \sin 314t \text{ kV}$ ，求在关联参考方向下的电流及储存的最大电场能量。



4.7 基尔霍夫定律的相量形式



目的与要求

理解KCL、KVL的向量形式



重点与 难点

重点: KCL、KVL的向量形式

难点: KCL、KVL的向量形式



4.7.1 相量形式的基尔霍夫电流定律

$$\sum i = 0$$

$$\sum \dot{I} = 0$$



4.7.2 相量形式的基尔霍夫电压定律

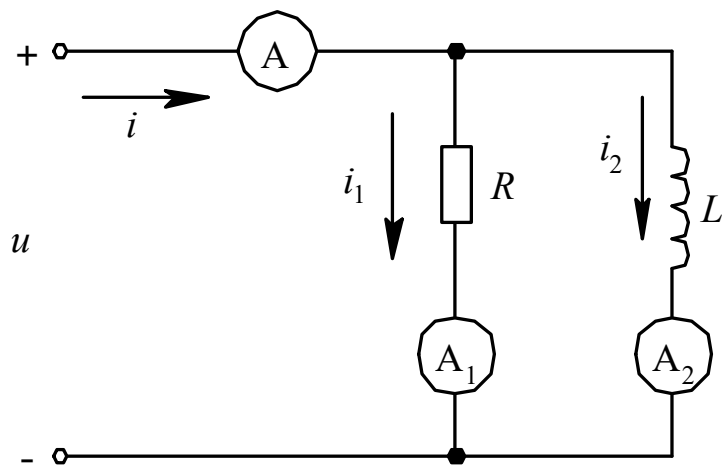
$$\sum u = 0$$

$$\sum \dot{U} = 0$$

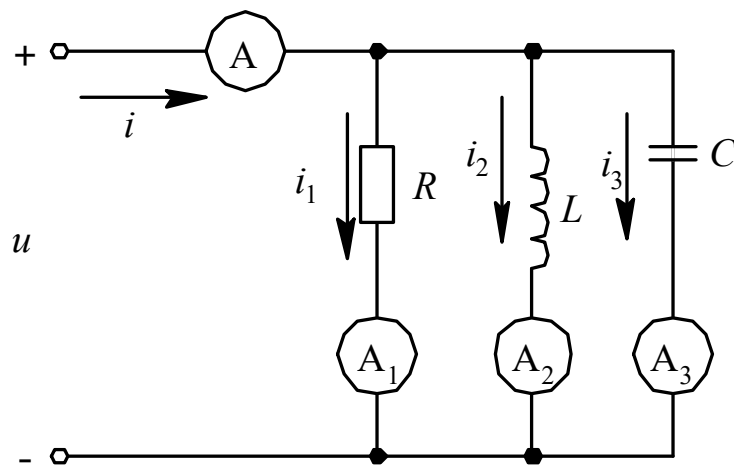


例 4.20 (一)

如图4.27 (a)、(b)所示电路中, 已知电流表 A_1 、 A_2 、 A_3 都是10 A, 求电路中电流表A的读数。



(a)



(b)

图 4.27 例4.20图



例 4.20 (二)

解 设端电压 $\dot{U} = U \angle 0^\circ V$

(1) 选定电流的参考方向如图(a)所示, 则

$$\dot{I}_1 = 10 \angle 0^\circ A \quad (\text{与电压同相})$$

$$\dot{I}_2 = 10 \angle -90^\circ A \quad (\text{滞后于电压} 90^\circ)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 10 \angle 0^\circ + 10 \angle -90^\circ = 10\sqrt{2} \angle -45^\circ A$$



例 4.20 (三)

电流表A的读数为 $10\sqrt{2}A$ 。 注意: 这与直流电路是不同的, 总电流并不是 $20A$ 。

(2) 选定电流的参考方向如图(b)所示, 则

$$\dot{I}_1 = 10 \angle 0^\circ A$$

$$\dot{I}_2 = 10 \angle -90^\circ A$$

$$\dot{I}_3 = 10 \angle 90^\circ A$$



例 4.20 (四)

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 10\angle 0^\circ + 10\angle -90^\circ + 10\angle 90^\circ = 10A$$

电流表A的读数为10A。

由KVL

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 50\angle 0^\circ + 50\angle 90^\circ = 50 + 50j = 50\sqrt{2}\angle 45^\circ V$$

所以电压表V的读数为 $50\sqrt{2}V$



例 4.20 (五)

选定 i 、 u_1 、 u_2 、 u_3 的参考方向如图(b)所示, 则

$$\dot{U}_1 = 50 \angle 0^\circ \text{V}$$

$$\dot{U}_2 = 50 \angle 90^\circ \text{V}$$

$$\dot{U}_3 = 50 \angle -90^\circ \text{V} \quad (\text{滞后于电流 } 90^\circ)$$

由KCL

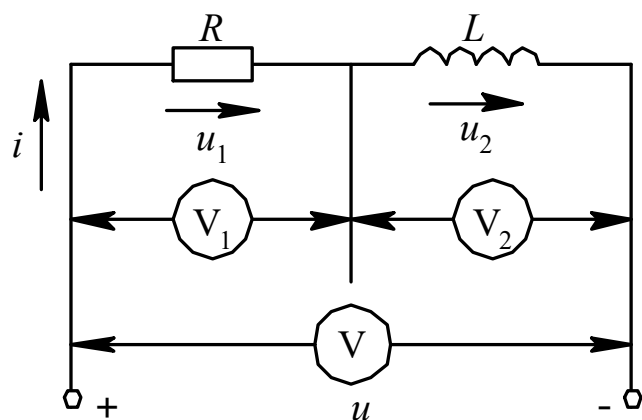
$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = 50 \angle 0^\circ + 50 \angle 90^\circ + 50 \angle -90^\circ = 50 + 50j - 50j = 50 \text{V}$$

电流表A的读数为50V。

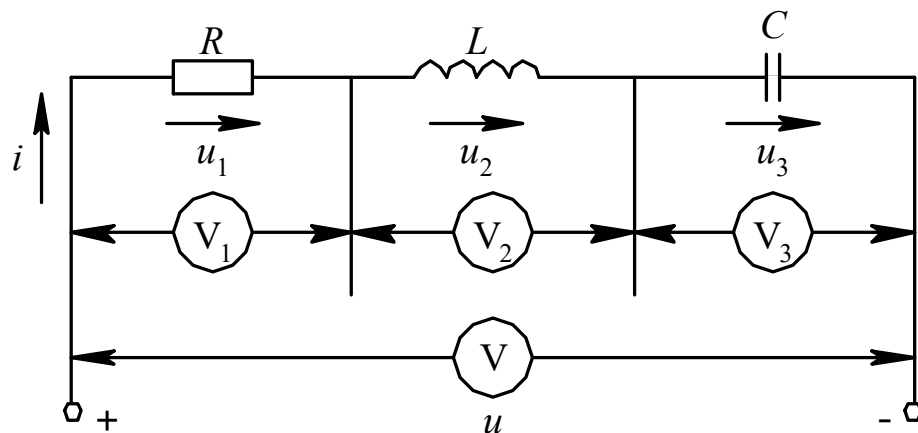


例4.21 (一)

如图4.28 (a)、(b)所示电路中, 电压表 V_1 、 V_2 、 V_3 的读数都是50V, 试分别求各电路中V表的读数。



(a)



(b)

图4.28 例4.21



例4.21 (二)

解： 设电流为参考相量, 即

$$\dot{I} = I \angle 0^\circ$$

a) 选定 i 、 u_1 、 u_2 、 u 的参考方向如图(a)所示, 则

$$\dot{U}_1 = 50 \angle 0^\circ \text{V} \quad (\text{与电流同相})$$

$$\dot{U}_2 = 50 \angle 90^\circ \text{V} \quad (\text{超前于电流 } 90^\circ)$$



教学方法

通过复习第一章讲过的基尔霍夫定律引入相量形式的基尔霍夫定律。



4.8 复阻抗、复导纳 及其等效变



目的与要求

会计算复阻抗、复导纳



重点与 难点

重点：复阻抗

难点：复阻抗



4.8.1 复阻抗与复导纳（一）

1、复阻抗

1)

$$\frac{\dot{U}_R}{\dot{I}_R} = R$$

$$\frac{\dot{U}_L}{\dot{I}_L} = j\omega L$$

$$\frac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C} = -j\frac{1}{\omega C}$$



4.8.1 复阻抗与复导纳（二）

$$2) \quad \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z = |Z| \angle \varphi = \frac{U \angle \theta_u}{I \angle \theta_i}$$

Z 称为该电路的阻抗

$$|Z| = \frac{U}{I}$$

$$\varphi = \theta_u - \theta_i$$

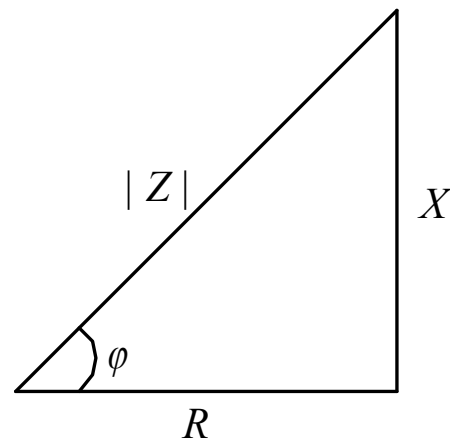
Z 是一个复数, 所以又称为复阻抗, $|Z|$ 是阻抗的模, φ 为阻抗角。复阻抗的图形符号与电阻的图形符号相似。复阻抗的单位为 Ω 。



4.8.1 复阻抗与复导纳（三）

$$Z = R + jX$$

Z 的实部为 R , 称为“电阻”,
 Z 的虚部为 X , 称为“电抗”,
它们之间符合阻抗三角形。



$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R}$$

图 4.30 阻抗三角形



4.8.1 复阻抗与复导纳（三）

2、复导纳

复阻抗的倒数叫复导纳, 用大写字母 Y 表示, 即

$$Y = \frac{1}{Z}$$

在国际单位制中, Y 的单位是西门子, 用“S”表示, 简称“西”。由于 $Z=R+jX$, 所以

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{|Z|^2} + j \frac{-X}{|Z|^2} = G + jB$$



4.8.1 复阻抗与复导纳（五）

复导纳 Y 的实部称为电导, 用 G 表示; 复导纳的虚部称为电纳, 用 B 表示, 由上式可知

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{R}{|Z|^2} \\ B &= \frac{-X}{|Z|^2} \end{aligned} \right\}$$



4.8.1 复阻抗与复导纳（六）

复导纳的极坐标形式为

$$Y = G + jB = |Y| \varphi'$$

$|Y|$ 为复导纳的模, φ' 为复导纳的导纳角, 所以有

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2}$$

$$\varphi' = \arctan \frac{B}{G}$$



4.8.1 复阻抗与复导纳（七）

3、复阻抗与复导纳的关系

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{|Z| \angle \varphi} = \frac{1}{|Z|} \angle -\varphi$$

$$Y = |Y| \angle \varphi'$$

$$|Y| = \frac{1}{|Z|}$$

$$\varphi' = -\varphi$$

$$\dot{I} = \dot{U} Y$$



4.8.2 复阻抗与复导纳的等效变换 (一)

1、将复阻抗等效为复导纳

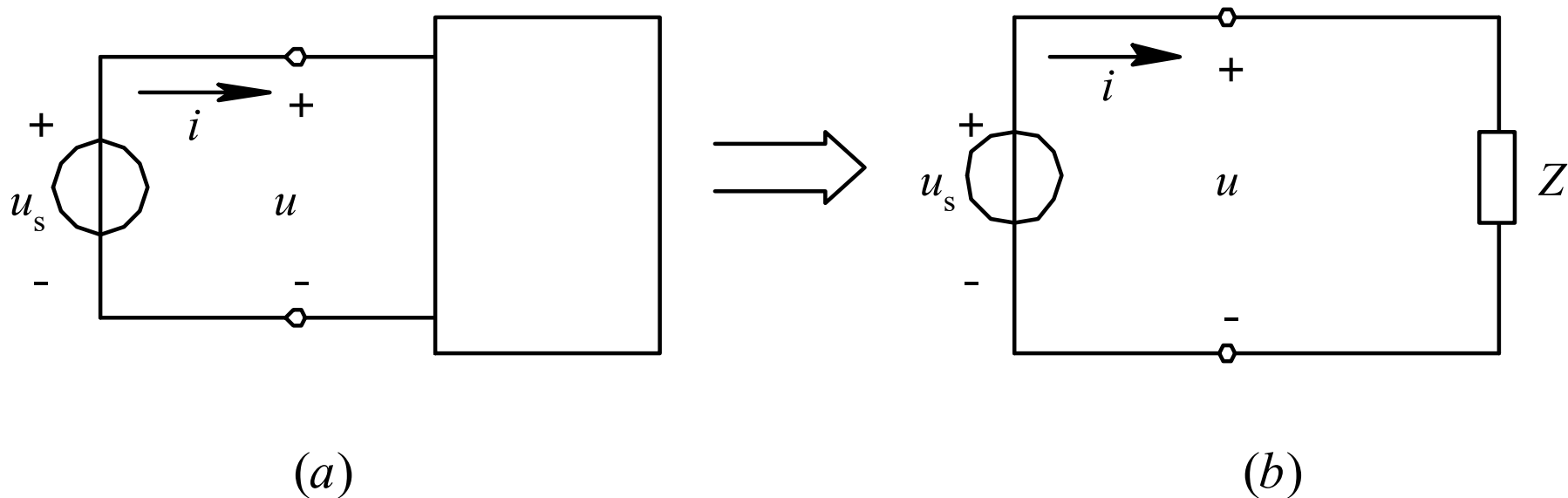


图4.29 正弦交流电路的复阻抗



4.8.2 复阻抗与复导纳的等效变换 (二)

2、将复导纳等效为复阻抗

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2} = \frac{G}{G^2 + B^2} - \frac{jB}{G^2 + B^2} = R + jX$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}$$

$$X = \frac{-B}{G^2 + B^2}$$



例 4.22

已知加在电路上的端电压为 $u=311\sin(\omega t+60^\circ)$ V, 通过电路中的电流为

$\dot{I}=10\angle-30^\circ$ A 求 $|Z|$ 、阻抗角 φ 和导纳角 φ' 。 解
电压的相量为

$$\dot{U} = \frac{311}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ - (-30^\circ) = 90^\circ$$

$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{220}{10} = 22\Omega$$

$$\varphi = \theta_u - \theta_i = 60^\circ - (-30^\circ) = 90^\circ$$

$$\varphi = -\varphi = -90^\circ$$



例4.23

如图4.31(a)所示, 已知电阻 $R=6\Omega$, $X=8\Omega$, 试求其等效复导纳。

解 由已知条件

$$Z = R + jX = 6 + j8\Omega$$

由式(4.53)可知 $G = \frac{R}{|Z|^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{6}{100} = 0.06S$

$$B = \frac{-X}{|Z|^2} = \frac{-X}{R^2 + X^2} = \frac{-8}{100} = -0.08S$$

$$Y = G + jB = 0.06 - j0.08S$$



教学方法

结合电阻、电导讲解阻抗、导纳



思考题（一）

1、判断下列叙述的正误

(1) 电路中的电压 $\dot{U}$ 一定超前电流 $\dot{I}$ 为 φ 角。

(2) 同一电流中的阻抗角和导纳角相差 180° 。

(3) 电路的导纳角等于总电流的初相角与总电压的初相角，即 $\varphi = \theta_i - \theta_u$ 。



思考题（二）

2、已知电路的端电压 $\dot{U} = 220 \angle -30^\circ \text{V}$ ，通过的电流为 $i = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 60^\circ) \text{A}$ ，求Y和导纳角 φ'

3、由G、B组成的并联电路，其复导纳 $Y = 0.05 \angle -30^\circ$ ，将其等效变换为复阻抗，求Z。



4.9 RLC串联电路电压 与电流的关系



目的与要求

会对R-L-C串联电路及多阻抗串联电路进行分析



重点与 难点

重点： R-L-C串联电路，多阻抗串联电路

难点： R-L-C串联电路



4.9.1 电压与电流的关系

$$\dot{I} = I \angle 0^\circ$$

$$\dot{U}_R = \dot{I} R$$

$$\dot{U}_L = \dot{I} jX_L$$

$$\dot{U}_C = -\dot{I} jX_C$$

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{I} R + \dot{I} jX_L - \dot{I} jX_C = \dot{I} [R + j(X_L - X_C)]$$

$$\dot{U} = \dot{I} (R + jX) = \dot{I} Z$$



4.9.2 电路的性质（一）

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R} > 0$$

1. 电感性电路: $X_L > X_C$

此时 $X > 0$, $U_L > U_C$ 。阻抗角 $\varphi > 0$ 。

2. 电容性电路: $X_L < X_C$

此时 $X < 0$, $U_L < U_C$ 。阻抗角 $\varphi < 0$ 。

3. 电阻性电路: $X_L = X_C$

此时 $X = 0$, $U_L = U_C$ 。阻抗角 $\varphi = 0$ 。



4.9.2 电路的性质（二）

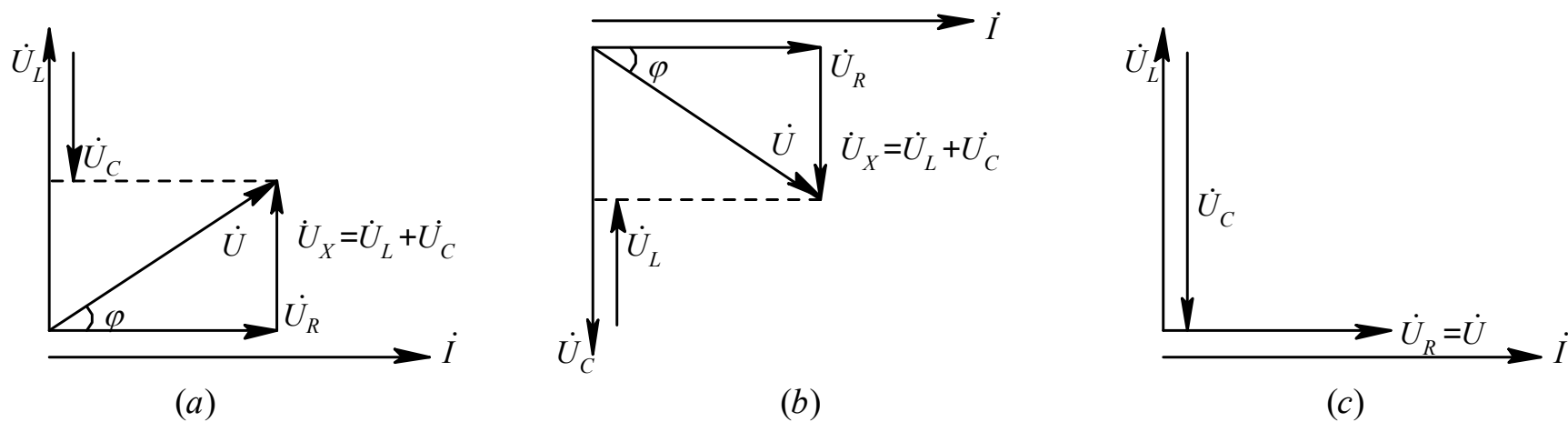


图4.33 RLC串联电路的相量图



4.9.3 阻抗串联电路（一）

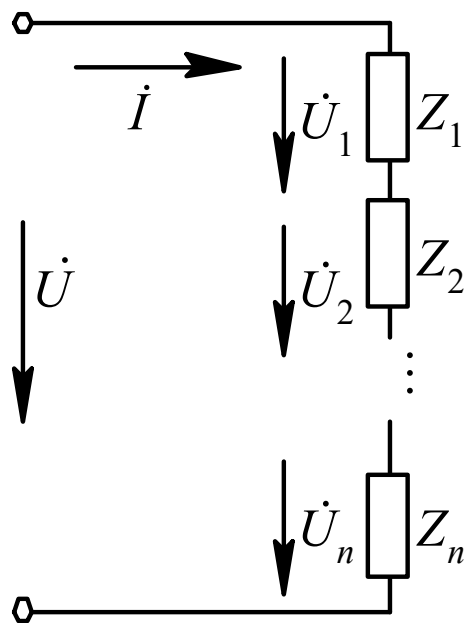


图4.34 多阻抗串联



4.9.3 阻抗串联电路（二）

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \cdots + \dot{U}_n$$

$$= \dot{I} Z_1 + \dot{I} Z_2 + \cdots + \dot{I} Z_n$$

$$= \dot{I} (Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)$$

$$= \dot{I} Z$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$



例 4.24 (一)

有一RLC串联电路, 其中 $R=30\Omega$, $L=382\text{mH}$, $C=39.8\mu\text{F}$, 外加电压 $u = 220\sqrt{2} \sin(314t + 60^\circ)\text{V}$
试求

(1) 复阻抗 Z , 并确定电路的性质;

(2); $\dot{I}$ 、 $\dot{U}_R$ 、 $\dot{U}_L$ 、 $\dot{U}_C$;

(3) 绘出相量图。



例 4.24 (二)

解 (1)

$$Z = R + j(X_L - X_C) = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$$= 30 + j(314 \times 0.382 - \frac{10^6}{314 \times 39.8})$$

$$= 30 + j(120 - 80) = 30 + j40 = 50 \angle 53.1^\circ \Omega$$

$\varphi = 53.1^\circ > 0$, 所以此电路为电感性电路。



例 4.24 (三)

$$(2) \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220 \angle 60^\circ}{50 \angle 53.1^\circ} = 4.4 \angle 6.9^\circ A$$

$$\dot{U}_R = \dot{I} R = 4.4 \angle 6.9^\circ \times 30 = 132 \angle 6.9^\circ V$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_L &= \dot{I} jX_L = 4.4 \angle 6.9^\circ \times 120 \angle 90^\circ \\ &= 528 \angle 96.9^\circ V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_C &= -\dot{I} jX_C = 4.4 \angle 6.9^\circ \times 80 \angle -90^\circ \\ &= 352 \angle -83.1^\circ V \end{aligned}$$



例 4.24 (四)

(3) 相量图如图4.35所示。

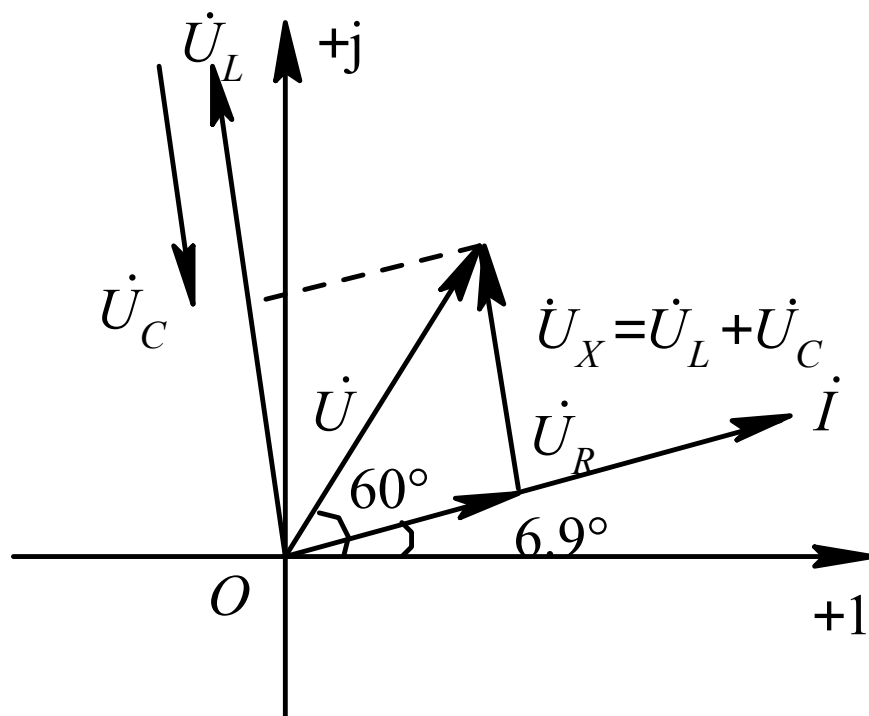


图4.36 例 4.25 图



例4.25 (一)

用电感降压来调速的电风扇的等效电路如图4.36(a)所示, 已知 $R=190\Omega$, $X_{L1}=260\Omega$, 电源电压 $U=220V$, $f=50Hz$, 要使 $U_2=180V$, 问串联的电感 L_x 应为多少?



例4.25 (二)

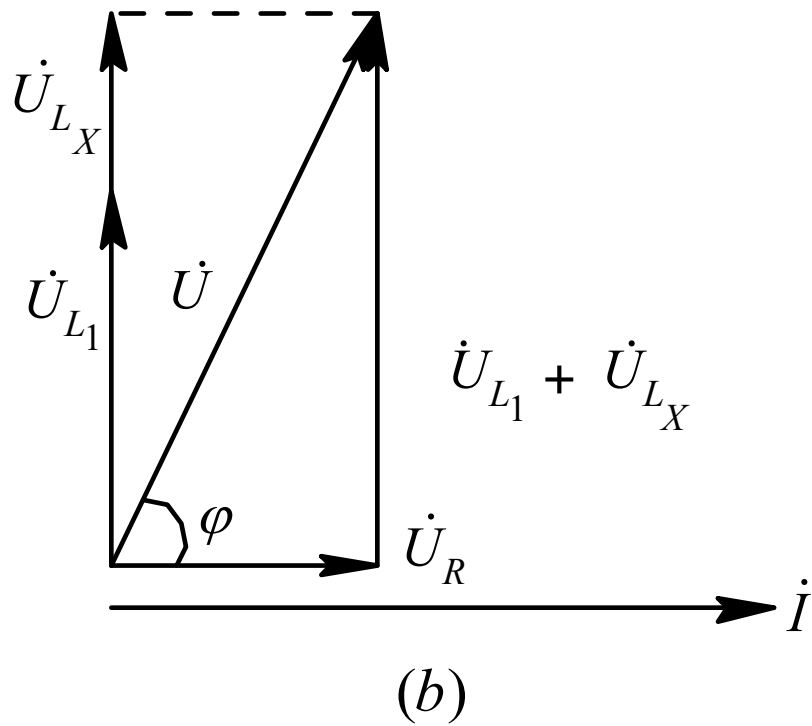
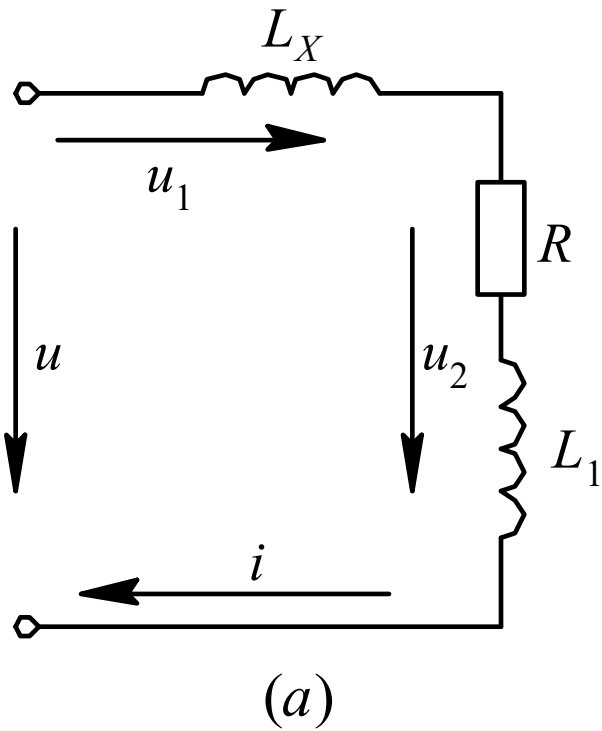


图4.36 例 4.25 图



例4.25 (三)

解 以 $\dot{I}$ 为参考相量, 作相量图如图4.36(b)所示。

$$Z_1 = R + jX_{L_1} = 190 + j260\Omega = 322/\underline{53.8^\circ}\Omega$$

$$I = \frac{U_2}{|Z_1|} = \frac{180}{322} = 0.56A$$

$$U_R = IR = 0.56 \times 190 = 106.4V$$

$$U_{L_1} = IX_{L_1} = 0.56 \times 260 = 145.6V$$



例4.25（四）

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_{L_1} + U_{L_X})^2}$$

$$220^2 = 106.4^2 + (145.6 + U_{L_X})^2$$

$$U_{L_X} = 64.96V$$

$$X_{L_X} = \frac{U_{L_X}}{I} = \frac{64.96}{0.56} = 83.9\Omega$$

$$X_{L_X} = \frac{U_{L_X}}{\omega} = \frac{83.9}{314} = 0.267H$$



例4.26 (一)

图 4.37(a)所示RC 串联电路中, 已知 $X_C = 10\sqrt{3}\Omega$ 要使输出电压滞后于输入电压 30° , 求电阻R。

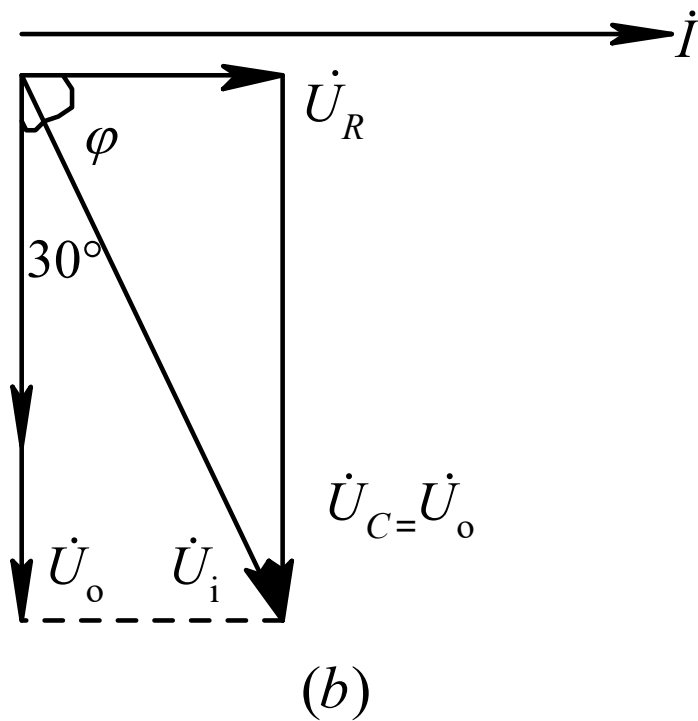
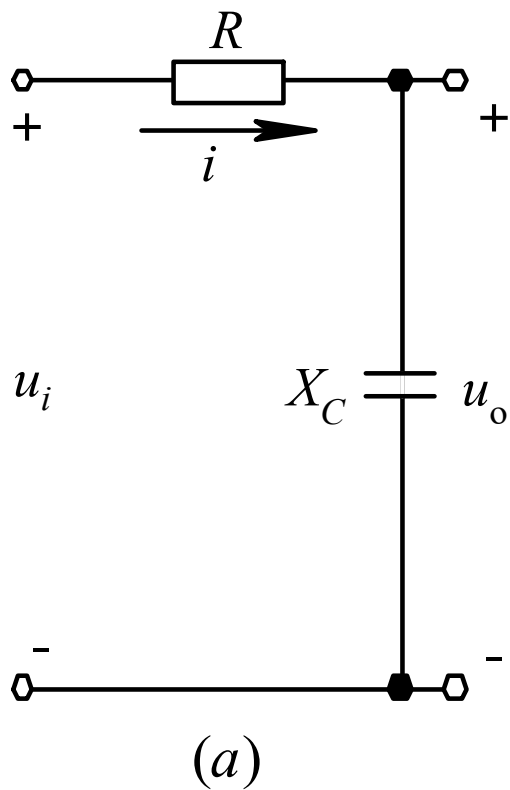


图4.37 例 4.26 图



例4.26 (二)

解 以 $\dot{I}$ 为参考相量, 作电流、电压相量图, 如图4.37(b)所示。

已知输出电压 $\dot{U}_0$ 滞后于输入电压 $\dot{U}_i$ 30° (注意不为阻抗角), 由相量图可知: 总电压滞后于电流 $\dot{U}_i$, 即阻抗角 $\dot{I}$ 60° $\varphi = -60^\circ$ 。所以

$$R = \frac{-X_C}{\tan \varphi} = \frac{X_C}{\tan(-60^\circ)} = \frac{-10\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = 10\Omega$$



教学方法

结合电阻的串联，讲解阻抗的串联



思考题（一）

1、判断下列表达式的正误，如下图1所示。

(1) $U = U_R + U_L + U_C$ ()

(2) $U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$ ()

(3) $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$ ()

(4) $Z = R + X_L + X_C$ ()

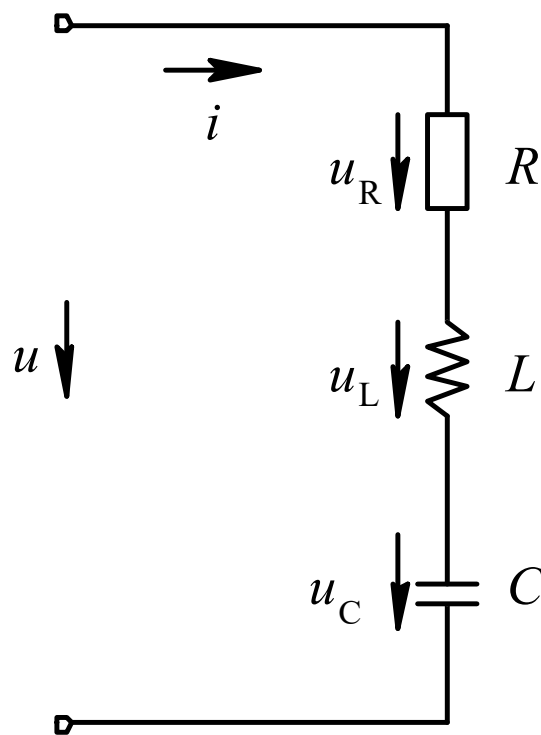


图 1



思考题（二）

2、图2所示为 RC 串联电路，已知 $R=10\Omega$ ， $\dot{U}_o$ 超前于 $\dot{U}_i$ 30° 求 X_C 。

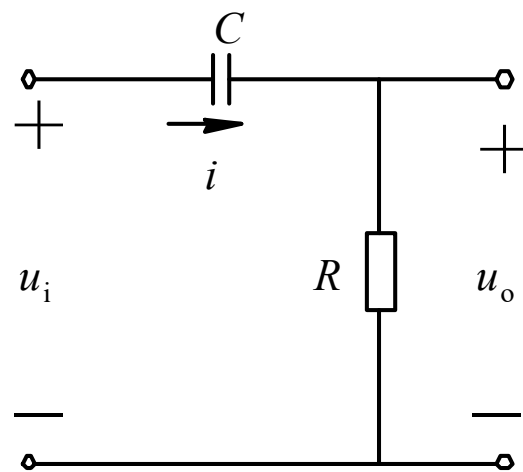


图 2



思考题（三）

3. 图3所示的RLC串联电路中，已知 $R=30\Omega$ ， $L=318.5\text{mH}$ ，

$C=53\mu\text{F}$ 接于 $f=50\text{Hz}$ 的电源上， $\dot{I}=2\angle-30^\circ\text{A}$ 。求

(1) 复阻抗 Z ，并确定电路的性质。

(2) $\dot{U}_R$ 、 $\dot{U}_L$ 、 $\dot{U}_C$ 及端电压 $\dot{U}$

(3) 绘电压、电流相量图。

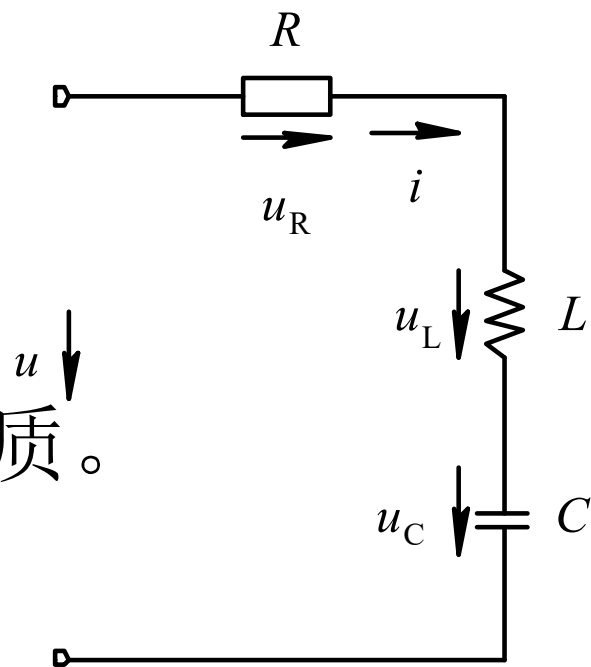


图 3



4.10 RLC并联电路



目的与要求

掌握并联电路的分析方法



重点与难点

重点： 并联电路的分析方法

难点： 导纳法



4.10.1 阻抗法分析并联电路（一）

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{\dot{U}}{R_1 + jX_L}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_2} = \frac{\dot{U}}{R_2 - jX_C}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z}$$

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

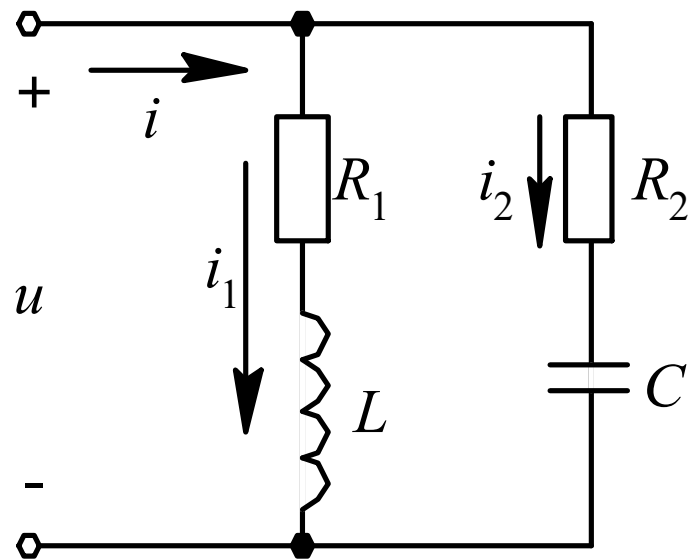


图4.41 并联电路



4.10.1 阻抗法分析并联电路（二）

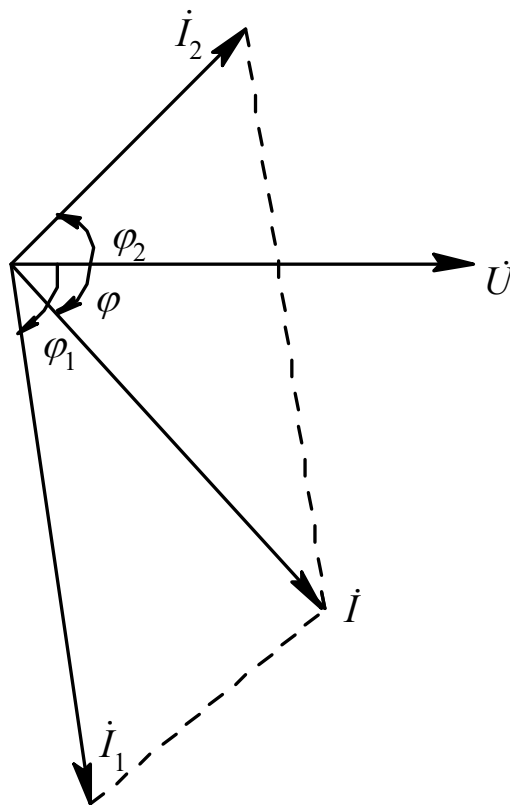


图4.42 并联电路的相量图



例 4.27 (一)

两条支路并联的电路如图4.43所示。已知 $R=8\ \Omega$ ， $X_L=6\ \Omega$ ， $X_C=10\ \Omega$ ，端电压 $u=220\sqrt{2}\sin(\omega t+60^\circ)V$ 求各支路电流 $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$ 及总电流 $\dot{I}$ ，并画出相量图。

解 选 u 、 $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$ 、 $\dot{I}$ 的参考方向如图所示。



例 4.27 (二)

$$Z_1 = R + jX_L = 8 + j6 = 10 \angle 36.9^\circ \Omega$$

$$Z_2 = -jX_C = -j10 = 10 \angle -90^\circ \Omega$$

$$\dot{U} = 220 \angle 60^\circ V$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{220 \angle 60^\circ}{10 \angle 36.9^\circ} = 22 \angle 23.1^\circ A$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2} = \frac{220 \angle 60^\circ}{10 \angle -90^\circ} = 22 \angle 150^\circ A$$



例 4.27 (三)

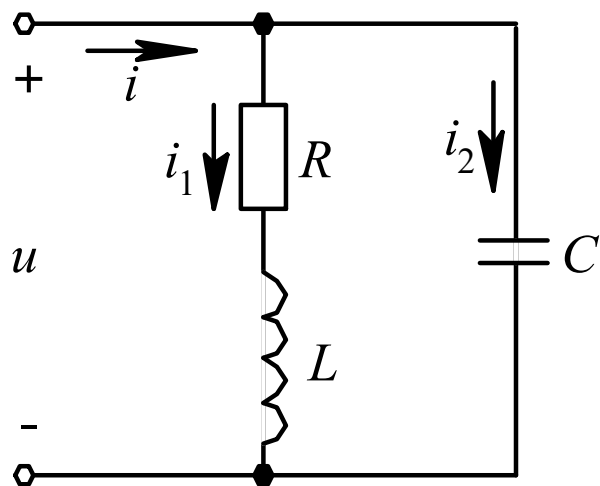


图 4.43 例4.27图

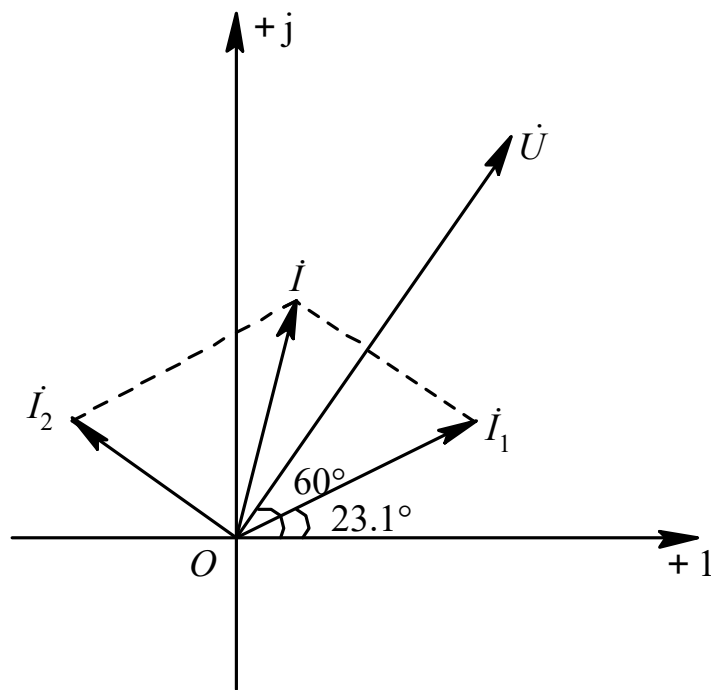


图4.44 例4.27相量图

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 22 \angle 23.1^\circ + 22 \angle 150^\circ = 20.2 + j8.6 - 19.1 + j11 \\ &= 1.1 + j19.6 = 19.7 \angle 86.8^\circ \text{ A}\end{aligned}$$



4.10.2 导纳法分析并联电路（一）

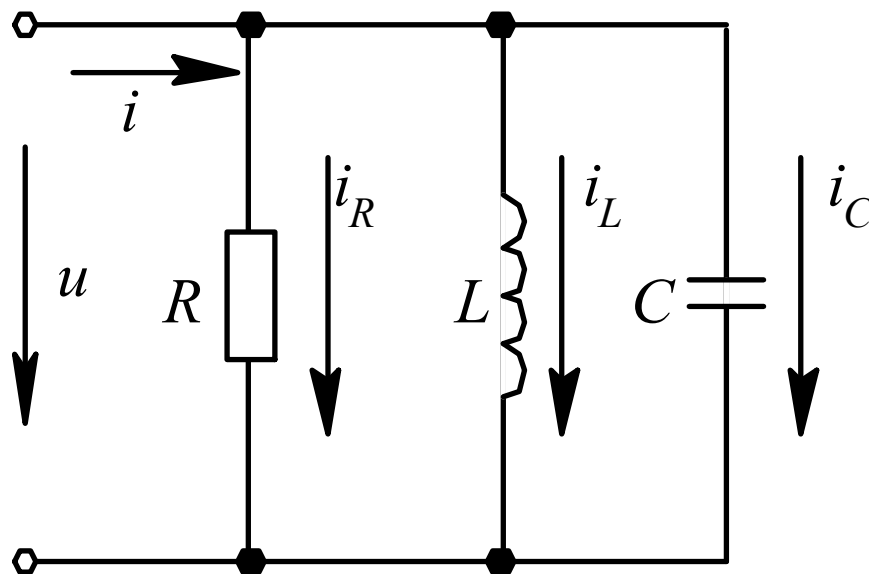


图4.45 RLC并联电路



4.10.2 导纳法分析并联电路（二）

$$Y_1 = \frac{1}{R} = G$$

$$Y_2 = \frac{1}{jX_L} = \frac{-j}{X_L} = -jB_L$$

$$Y_3 = \frac{1}{-jX_C} = \frac{j}{X_C} = jB_C$$



4.10.2 导纳法分析并联电路（三）

$$\dot{I}_R = Y_1 \dot{U} = \dot{U} G$$

$$\dot{I}_L = Y_2 \dot{U} = -jB_L \dot{U}$$

$$\dot{I}_C = Y_3 \dot{U} = jB_C \dot{U}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = \dot{U}(G - jB_L + jB_C) = \dot{U}(G + jB)$$



4.10.2 导纳法分析并联电路（四）

其中 $G = \frac{1}{R}$ 为电阻支路的“电导”； $B_L = \frac{1}{\omega L}$ 为电感支路的“感纳”； $B_C = \omega C$ 为电容支路的“容纳”。 $B = B_C - B_L$ 称为“电纳”，利用电纳也可判断电路的性质：



4.10.2 导纳法分析并联电路（五）

(1) $B > 0$, 即 $B_C > B_L$ 。这时 $I_L < I_C$, 总电流超前于端电压, 电路呈电容性, 如图4.46 (a) 所示。

(2) $B < 0$, 即 $B_C < B_L$ 。这时 $I_L > I_C$, 总电流滞后于端电压, 电路呈电感性, 如图4.46 (b) 所示。

(3) $B = 0$, 即 $B_C = B_L$ 。这时 $I_L = I_C$, 总电流与端电压同相, 电路呈电阻性, 如图4.46 (c) 所示。



4.10.2 导纳法分析并联电路（六）

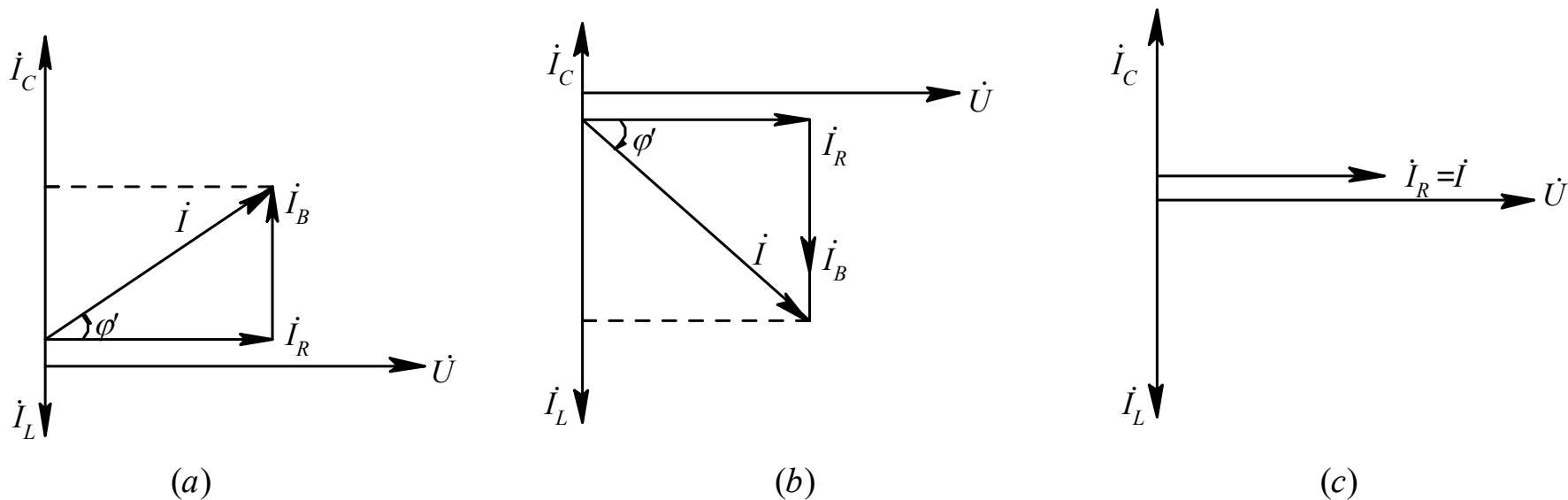


图4.46 RLC并联电路相量图



例 4.28 (一)

图4.45所示为RLC并联电路, 已知端电压为

$$u = 220\sqrt{2} \sin(314t + 30^\circ)V, R = 10\Omega, L = 127mH, C = 159\mu F$$

(1) 并联电路的复导纳Y;

(2) 各支路的电流 $\dot{I}_R$ 、 $\dot{I}_L$ 、 $\dot{I}_C$ 和总电流 $\dot{I}$

(3) 绘出相量图。



例 4.28 (二)

解 选 u 、 i 、 i_R 、 i_L 、 i_C 的参考方向如图所示。

$$Y_1 = \frac{1}{R} = \frac{1}{10} = 0.1S$$

$$Y_2 = \frac{1}{jX_L} = \frac{-j}{314 \times 127 \times 10^{-3}} = -j0.025S$$

$$Y_3 = \frac{1}{-jX_C} = j\omega C = j314 \times 159 \times 10^{-6} = j0.05S$$



例 4.28 (三)

$$(1) Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0.1 + j(0.05 - 0.025) = 0.1 + j0.025 = 0.103 \angle 14^\circ \text{ S}$$

(2) 由已知 $U = 220 \angle 30^\circ \text{ V}$, 则

$$\dot{I}_R = \dot{U} Y_1 = 220 \angle 30^\circ \times 0.1 = 22 \angle 30^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_L = \dot{U} Y_2 = 220 \angle 30^\circ \times (-j0.025) = 5.5 \angle -60^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \dot{U} Y_3 = 220 \angle 30^\circ \times j0.05 = 11 \angle 120^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I} = \dot{U} Y = 220 \angle 30^\circ \times 0.103 \angle 14^\circ = 22.7 \angle 44^\circ \text{ A}$$



例 4.28 (四)

(3) 相量图如图4.47所示。

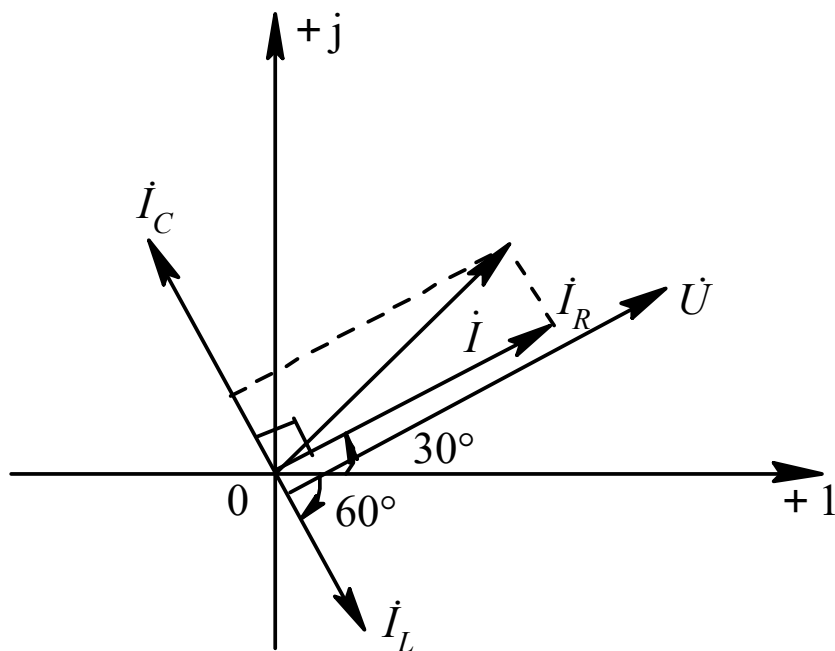


图4.47 例4.28相量图



4.10.3 多阻抗并联（一）

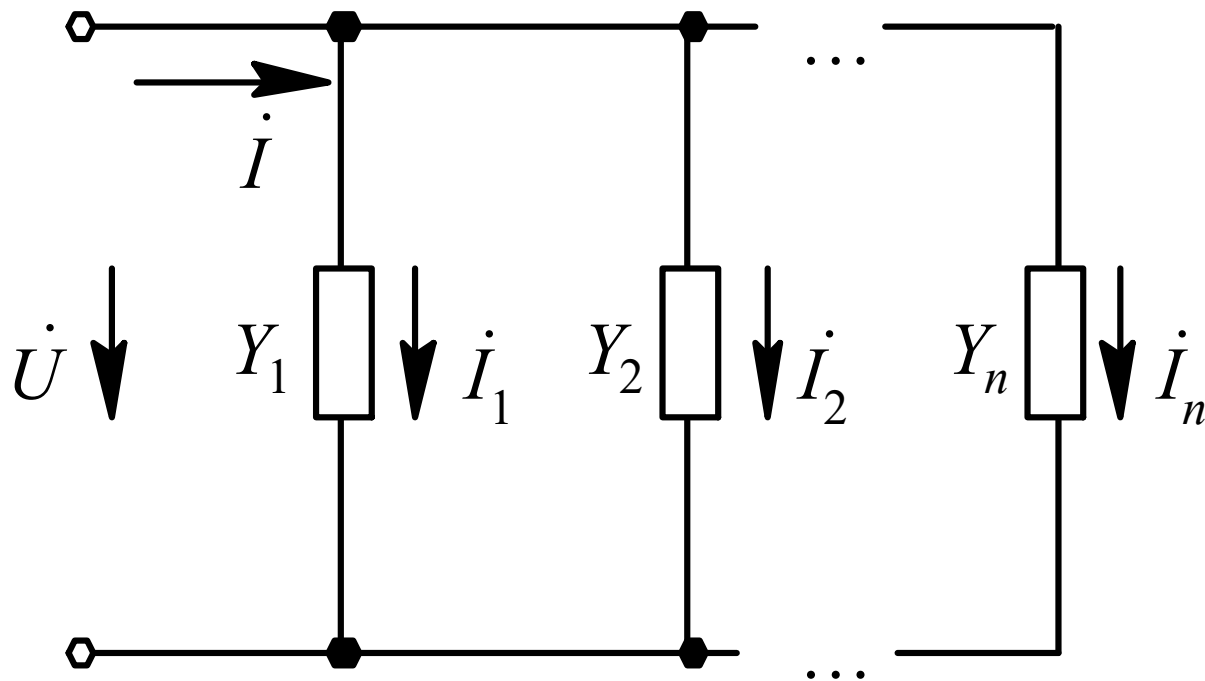


图4.48 多阻抗并联



4.10.3 多阻抗并联（二）

$$\dot{I}_1 = \dot{U} Y_1 \quad \dot{I}_2 = \dot{U} Y_2 \quad \dot{I}_n = \dot{U} Y_n$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_n = \dot{U} (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) = \dot{U} Y$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = G_1 + jB_1 + G_2 + jB_2 + \dots + G_n + jB_n$$

$$= (G_1 + G_2 + \dots + G_n) + j(B_1 + B_2 + \dots + B_n) = G + jB$$

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_n$$

$$B = B_1 + B_2 + \dots + B_n$$

例4.29 (一)

图 4.49 所示并联电路中, 已知端电压

试求 $u = 220\sqrt{2} \sin(314t - 30^\circ) \text{V}$, $X_L = X_C = 8\Omega$

(1) 总导纳 Y ;

(2) 各支路电流 $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$
和总电流 $\dot{I}$ 。

解 选 u 、 i 、 i_1 、 i_2 的参考方向如图所示。

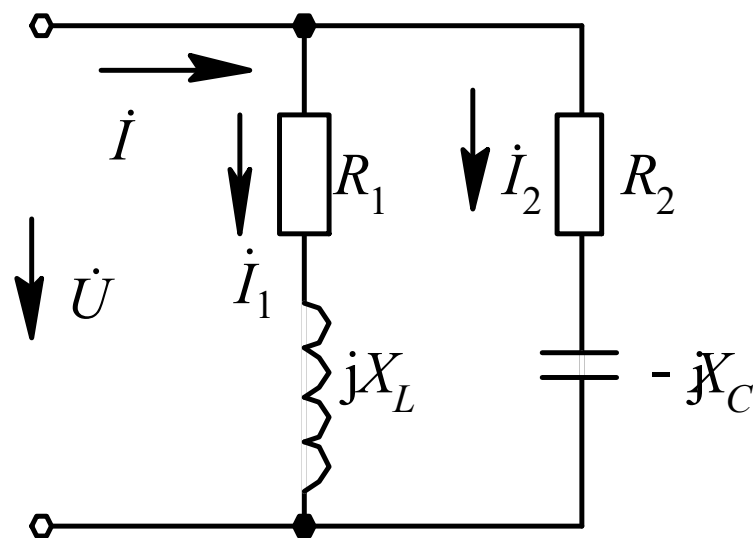


图4.49 例 4.29 图



例4.29 (二)

由已知 $\dot{U} = 220 \angle -30^\circ \text{V}$, 有

$$(1) Y_1 = \frac{1}{R_1 + jX_L} = \frac{1}{6 + j8} = \frac{6 - j8}{100} = 0.06 - j0.08 \text{S}$$

$$Y_2 = \frac{1}{R_2 - jX_C} = \frac{1}{6 - j8} = \frac{6 + j8}{100} = 0.06 + j0.08 \text{S}$$

$$Y = Y_1 + Y_2 = 0.06 - j0.08 + 0.06 + j0.08 = 0.12 \text{S}$$

$$(2) \dot{I}_1 = \dot{U} Y_1 = 220 \angle -30^\circ \times 0.1 \angle -53.1^\circ = 22 \angle -83.1^\circ \text{A}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{U} Y_2 = 220 \angle -30^\circ \times 0.1 \angle 53.1^\circ = 22 \angle 23.1^\circ \text{A}$$

$$\dot{I} = \dot{U} Y = 220 \angle -30^\circ \times 0.12 = 26.4 \angle -30^\circ \text{A}$$



教学方法

与电阻的串并联对比来讲解本节内容



思考题（一）

1.在图1所示的RLC并联电路中，判断下列表达式的正（√） 误（×）

$$(1) I = I_R + I_L + I_C \quad () \quad (2) i = i_R + i_L + i_C \quad ()$$

$$(3) \dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C \quad () \quad (4) I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}$$

$$(5) \dot{I} = \dot{U} Y \quad () \quad (6) i = u |Y| \quad ()$$

$$(7) \varphi' = \arctan \frac{B_L - B_C}{G} \quad ()$$

$$(8) U = \frac{I}{|Y|} \quad ()$$



思考题（二）

2. 图1所示的RLC并联电路中，已知 $R=3\Omega$ ， $X_L=4\Omega$ ， $X_C=8\Omega$ ，则电路的性质为_____性。

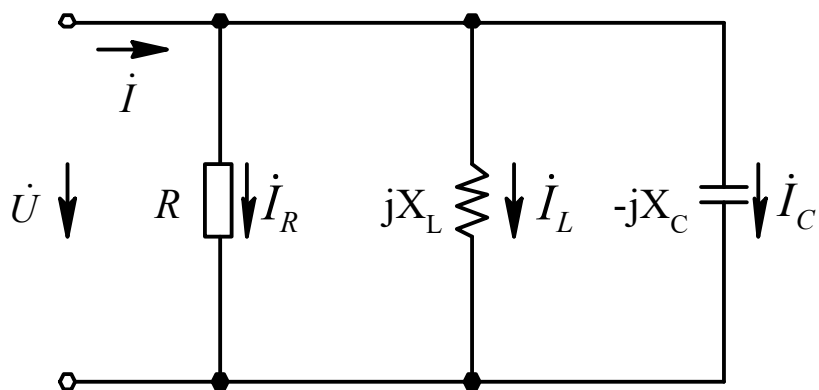


图 1

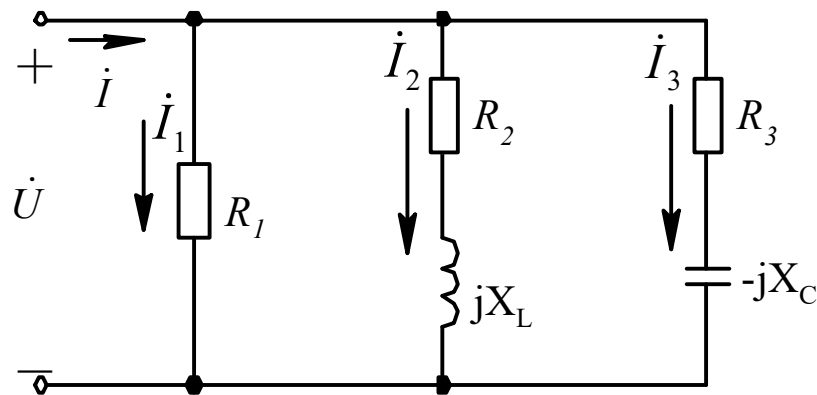


图 2



思考题（三）

3.图2所示并联电路中， $R_1=50\Omega$ ， $R_2=40\Omega$
 $R_3=80\Omega$ ， $L=52.9\text{mH}$ ， $C=24\mu\text{F}$ ，接到电压为

$$u = 220\sqrt{2} \sin(700t + 45^\circ) \text{V}$$

上，试求各支路电流 $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$ 、 $\dot{I}_3$ 和总电流 $\dot{I}$ 。



4.11 正弦交流电路 的相量分析法



目的与要求

理解正弦交流电路的相量分析法



重点与 难点

重点： 会用相量分析法列方程

难点： 会用相量分析法列方程



4.11.1 网孔电流法（一）

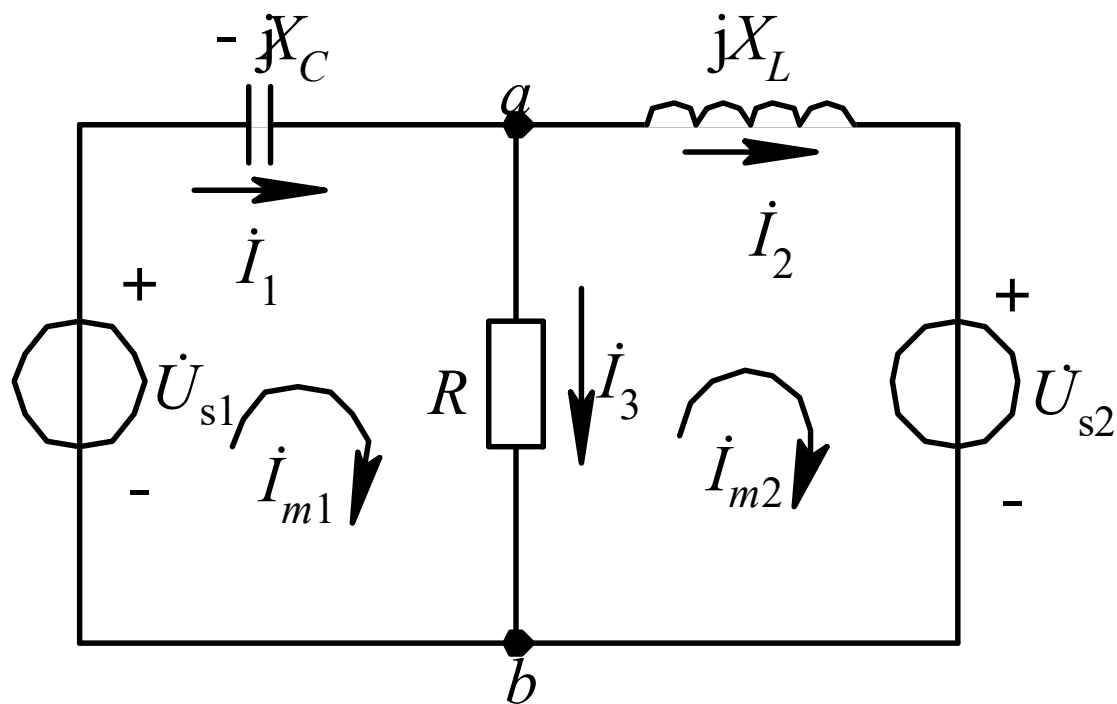


图 4.52 网孔电流法



4.11.1 网孔电流法（二）

$$\begin{cases} Z_{11} \dot{I}_{m1} + Z_{12} \dot{I}_{m2} = \dot{U}_{s11} \\ Z_{21} \dot{I}_{m1} + Z_{22} \dot{I}_{m2} = \dot{U}_{s22} \end{cases}$$

$$Z_{11} = R - jX_C, Z_{12} = Z_{21} = -R$$

$$Z_{22} = R + jX_L$$

$$\dot{U}_{s11} = \dot{U}_{s1}, \dot{U}_{s22} = -\dot{U}_{s2}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{m1}, \dot{I}_2 = \dot{I}_{m2}, \dot{I}_3 = \dot{I}_{m1} - \dot{I}_{m2}$$



例 4.30 (一)

图 4.52 所示电路中, 已知 $\dot{U}_{s1} = 100\angle 0^\circ \text{V}$,
 $\dot{U}_{s2} = 100\angle 90^\circ \text{V}$, $R = 6\Omega$, $X_L = 8\Omega$, $X_C = 8\Omega$

解 选定各支路电流 $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$ 、 $\dot{I}_3$ 和网孔电流 $\dot{I}_{m1}$ 、 $\dot{I}_{m2}$ 的参考方向如图所示, 选定绕行方向和网孔电流的参考方向一致。列出网孔方程为

$$(6 - j8)\dot{I}_{m1} - 6\dot{I}_{m2} = 100\angle 0^\circ$$

$$-6\dot{I}_{m1} + (6 + j8)\dot{I}_{m2} = -100j$$



例 4.30 (二)

$$\dot{I}_{m2} = \frac{(6 - j8) \dot{I}_{m1} - 100}{6}$$

$$-6 \dot{I}_{m1} + \frac{(6 + j8)[(6 - j8) \dot{I}_{m1} - 100]}{6} = -100 j$$

$$\dot{I}_{m1} = 9.38 + j3.13 = 9.89 \angle 19^\circ A$$

$$\dot{I}_{m2} = -3 - j9.25 = 9.8 \angle -108^\circ A$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{m1} = 9.89 \angle 19^\circ A$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{m2} = 9.8 \angle -108^\circ A$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{m1} - \dot{I}_{m2} = 9.89 \angle 19^\circ - 9.8 \angle -108^\circ = 17.6 \angle 45^\circ A$$



4.11.2 节点法

$$\dot{U}_{ab} = \frac{\dot{U}_{s1} Y_1 + \dot{U}_{s2} Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

其中 $Y_1 = \frac{1}{-jX_C}, Y_2 = \frac{1}{-jX_L}, Y_3 = \frac{1}{R}$



例 4.31 (一)

图 4.52 所示电路中已知数据同例 4.30, 试用节点法求各支路电流。

解 以 b 点为参考节点, 各支路电流 $\dot{I}_1$ $\dot{I}_1$ $\dot{I}_3$ 参考方向如图所示

$$Y_1 = \frac{1}{-jX_C} = -\frac{1}{j8} S$$

$$Y_2 = \frac{1}{jX_L} = -\frac{1}{j8} S$$

$$Y_3 = \frac{1}{R} = -\frac{1}{6} S$$



例 4.31 (二)

$$\dot{U}_{ab} = \frac{\frac{100}{-j8} + \frac{j100}{j8}}{\frac{1}{-j8} + \frac{1}{j8} + \frac{1}{6}} = \frac{600}{8}(1+j) = 106.1\angle 45^\circ V$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{s1} - \dot{U}_{ab}}{-jX_C} = \frac{100 - 106.1\angle 45^\circ}{-j8} = \frac{632.5\angle -71^\circ}{64\angle -90^\circ} = 9.89\angle 19^\circ A$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab} - \dot{U}_{s2}}{jX_L} = \frac{106.1\angle 45^\circ - j100}{j8} = \frac{632.5\angle -18^\circ}{8\angle 90^\circ} = 9.89\angle 108^\circ A$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ab}}{R} = \frac{106\angle 45^\circ}{6} = 17.7\angle 45^\circ A$$



教学方法

与直流电路比较，来解几道例题



4.12 正弦交流电路的功率



目的与要求

会计算正弦交流电路的功率



重点与难点

重点：有功功率、无功功率、视在功率的计算

难点：有功功率、无功功率、视在功率的计算



4.12.1 瞬时功率 p

$$i = \sqrt{2}I \sin \omega t$$

$$u = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \varphi)$$

$$p = ui = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \varphi) \cdot \sqrt{2}I \sin \omega t$$

$$= 2UI \sin(\omega t + \varphi) \cdot \sin \omega t$$

$$= 2UI \cdot \frac{1}{2} [\cos(\omega t - \omega t - \varphi) - \cos(\omega t + \omega t + \varphi)]$$

$$= UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)]$$

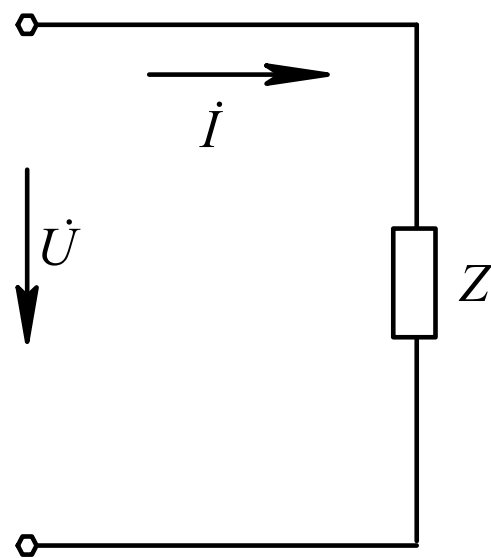


图4.53 功率



4.12.2 有功功率 P （一）

我们把一个周期内瞬时功率的平均值称为“平均功率”，或称为“有功功率”，用字母“ P ”表示，即

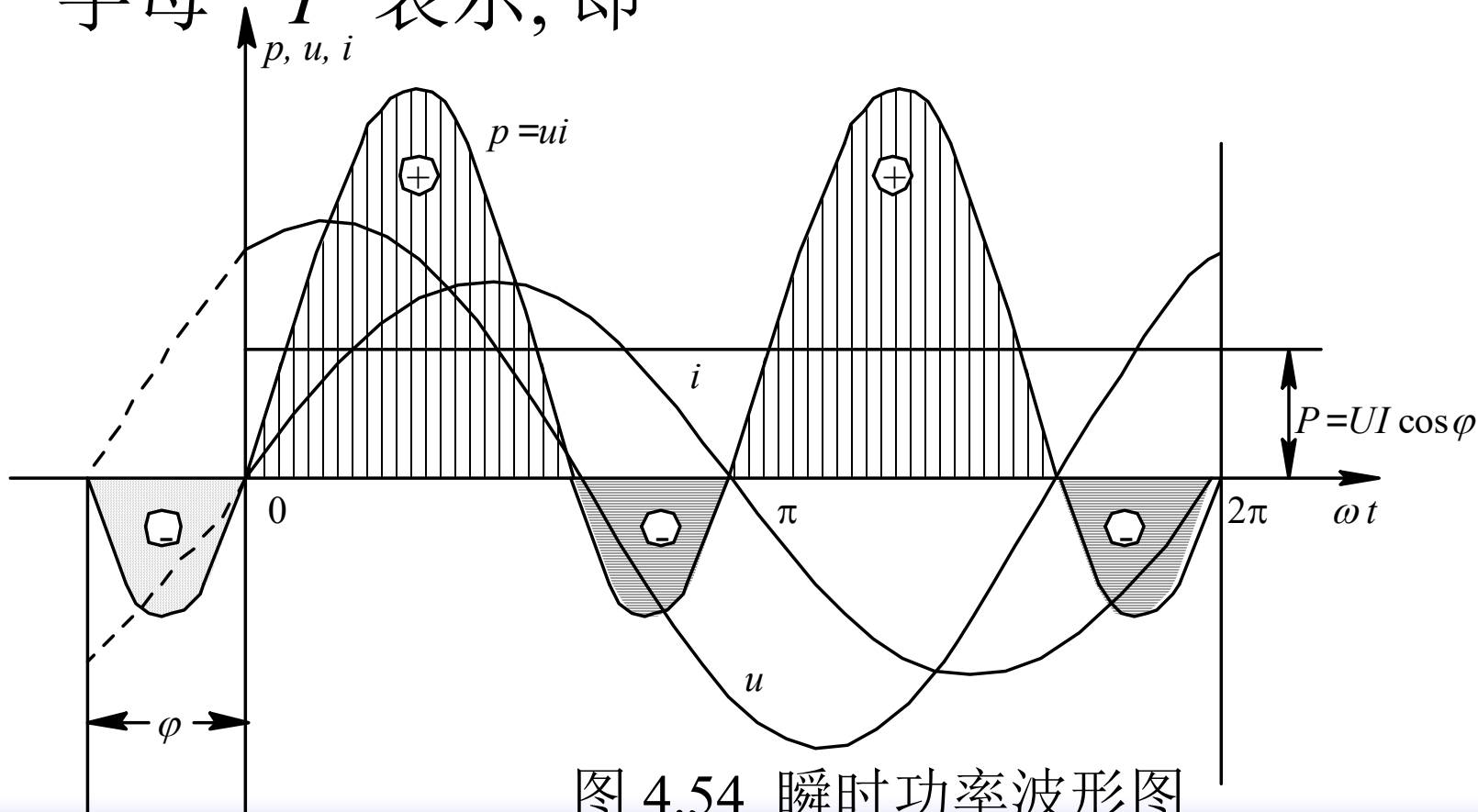


图 4.54 瞬时功率波形图



4.12.2 有功功率 P (二)

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (UI \cos \varphi) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos(2\omega t + \varphi)] dt = UI \cos \varphi - 0 \end{aligned}$$

$$P = UI \cos \varphi = UI \lambda$$

$$P = UI \cos \varphi = P_R = U_R I$$

$$P = U_R I = I^2 R$$



4.12.3 无功功率 Q

$$Q = UI \sin \varphi$$

$$Q = Q_L + Q_C$$



4.12.4 视在功率 S

$$S = UI$$



4.12.5 功率三角形

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{Q}{P}$$

$$\lambda = \cos \varphi = \frac{P}{S}$$

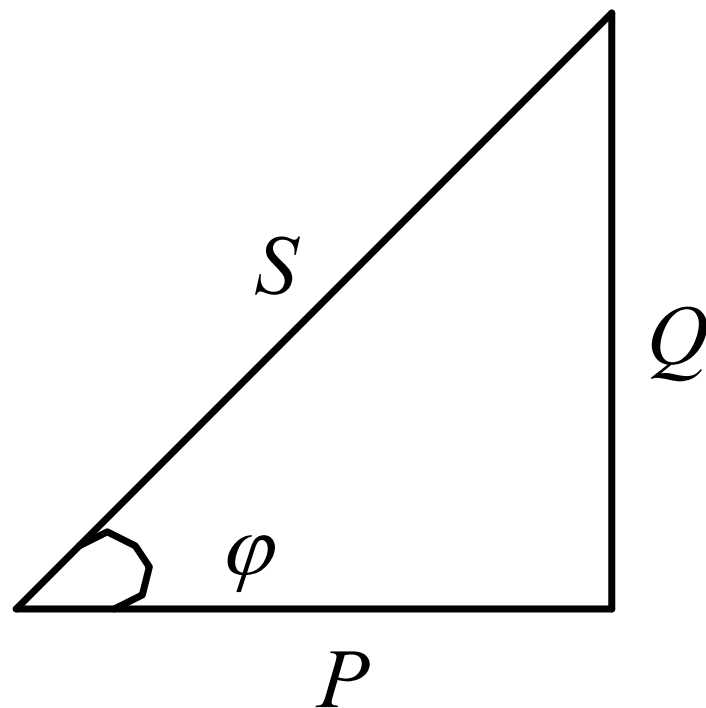


图4.55 功率三角形



例 4.32 (一)

已知一阻抗 Z 上的电压、电流分别为
 $\dot{U} = 220 \angle 30^\circ \text{V}$, $\dot{I} = 5 \angle -30^\circ \text{A}$ (电压和电流
的参考方向一致), 求 Z 、 $\cos\varphi$ 、 P 、 Q 、 S 。



例 4.32 (二)

解

$$Z = \frac{U}{\dot{I}} = \frac{220\angle 30^\circ}{5\angle -30^\circ} = 44\angle 60^\circ \Omega$$

$$\cos \varphi = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$P = UI \cos \varphi = 220 \times 5 \times \frac{1}{2} = 550 W$$

$$Q = UI \sin \varphi = 220 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 550\sqrt{3} \text{ var}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1100 VA$$



例4.33 (一)

已知 40W 的日光灯电路如图4.56所示, 在 $U=220\text{V}$ 的电压之下, 电流值为 $I=0.36\text{A}$, 求该日光灯的功率因数 $\cos\varphi$ 及所需的无功功率 Q 。

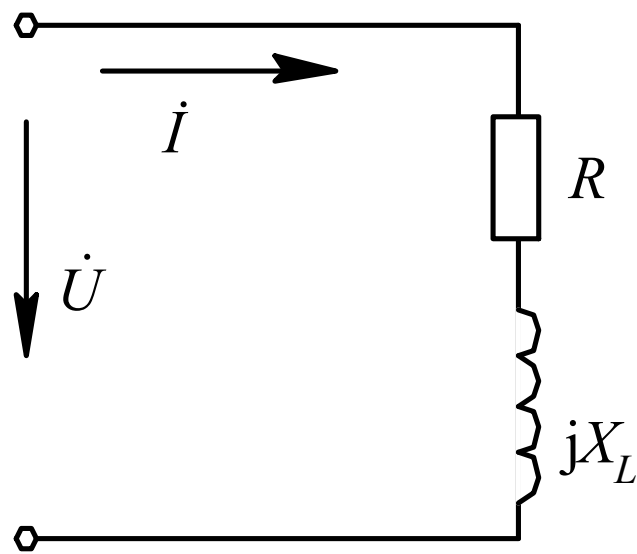


图4.56 例 4.33 图



例4.33 (二)

解 因为 $P = UI \cos \varphi$

所以

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{40}{220 \times 0.36} = 0.5$$

由于是电感性电路, 所以 $\varphi = 60^\circ$
电路中的无功功率为

$$Q = UI \sin \varphi = 220 \times 0.36 \times \sin 60^\circ = 69 \text{ var}$$



例 4.34 (一)

用三表法测量一个线圈的参数, 如图4.57所示, 得下列数据: 电压表的读数为 50V , 电流表的读数为 1A , 功率表的读数为 30W , 试求该线圈的参数 R 和 L 。(电源的频率为 50Hz)

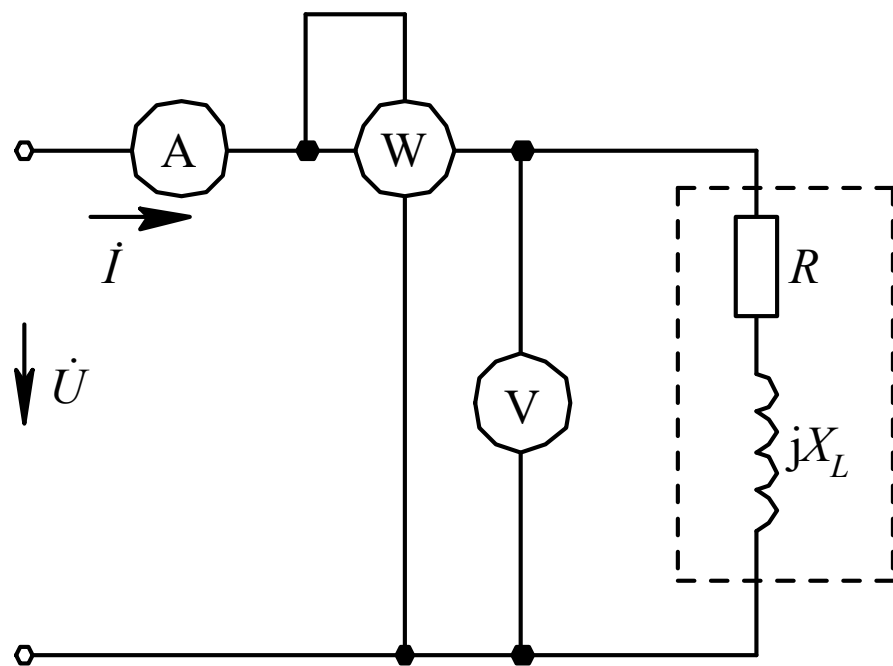


图4.57 例4.34图



例 4.34 (二)

解 选 u 、 i 为关联参考方向,如图4.57所示。根据

$$P = I^2 R$$

求得

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{30}{1^2} = 30\Omega$$

线圈的阻抗

$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{50}{1} = 50\Omega$$

由于

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

所以

$$X_L = \sqrt{|Z|^2 - R^2} = 40\Omega$$

则

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{40}{314} = 0.127$$



教学方法

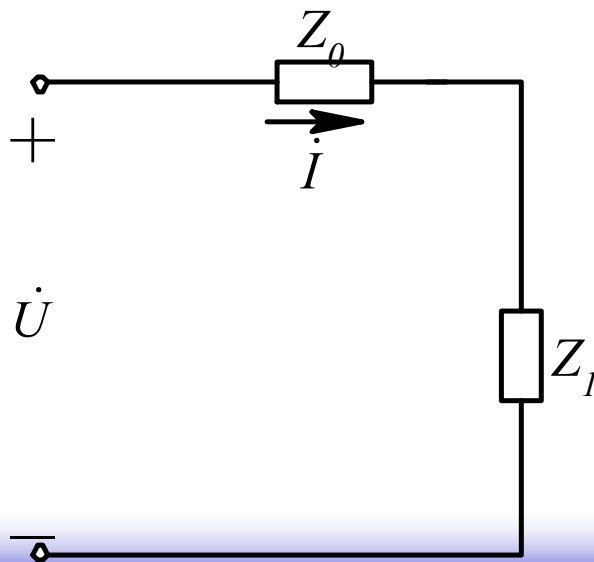
与R、L、C电路的功率比较，说明两者之间的关系



思考题

1. 已知一阻抗 $Z = 10 \angle 60^\circ \Omega$, 外加电压 $\dot{U} = 220 \angle 15^\circ V$, 试求P、Q、S及 $\cos\varphi$ 。

2. 下图所示为两阻抗串联电路, 已知 $Z_1 = 60 + j30 \Omega$, 测得 $U = 220V, I = 1A$, 电路的总功率为 $P = 200W$, 求 Z_0





4.13 功率因数的提高



目的与要求

了解提高功率因数的方法



重点与难点

重点：提高功率因数的方法

难点：提高功率因数的方法



4.13.1 提高功率因数的意义

功率因数低会引起下述的不良后果。

- (1) 电源设备的容量不能得到充分的利用。
- (2) 增加了线路上的功率损耗和电压降。



4.13.2 提高功率因数的方法（一）

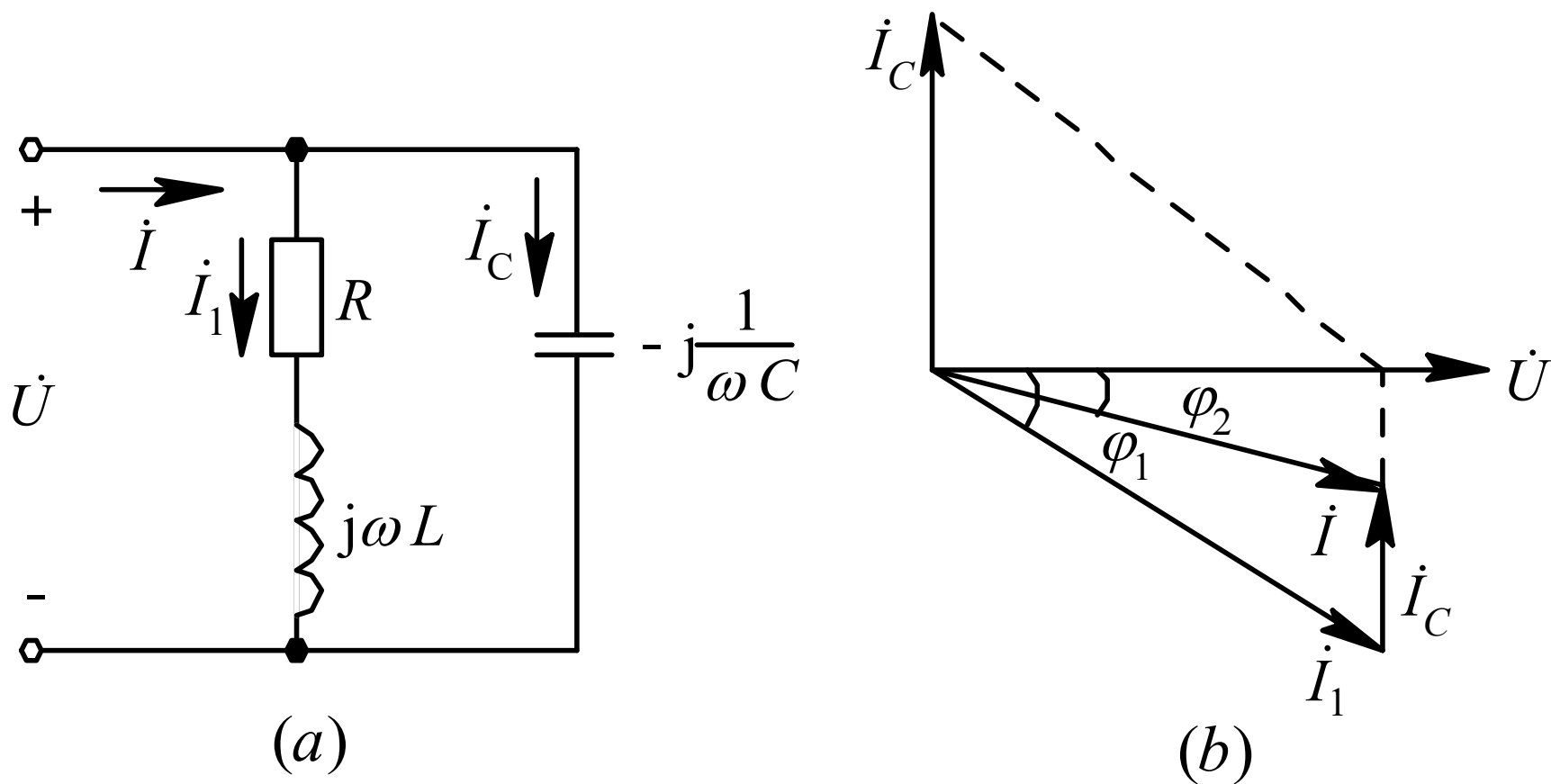


图4.59 功率因数的提高



4.13.2 提高功率因数的方法（二）

并联电容前有

$$P = UI_1 \cos \varphi_1, I_1 = \frac{P}{U \cos \varphi_1}$$

并联电容后有

$$P = UI_2 \cos \varphi_2, I_2 = \frac{P}{U \cos \varphi_2}$$

由图4.59（b）可以看出

$$\begin{aligned} I_C &= I_1 \sin \varphi_1 - I_2 \sin \varphi_2 = \frac{P \sin \varphi_1}{U \cos \varphi_1} - \frac{P \sin \varphi_2}{U \cos \varphi_2} \\ &= \frac{P}{U} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2) \end{aligned}$$

又知

$$I_C = \frac{U}{X_C} = \omega C U$$

代入上式可得

$$\omega C U = \frac{P}{U} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2)$$



4.13.2 提高功率因数的方法（三）

即

$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2) \quad (4.73)$$

因为

$$Q_C = I^2 X_C = \frac{U^2}{X_C} = \omega C U^2$$

所以

$$C = \frac{Q_C}{\omega U^2}$$

代入式4.73可得 $Q_C = P(\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2) \quad (4.74)$

例 4.35 (一)

如图 4.60 所示为一日光灯装置等效电路, 已知 $P=40\text{W}$, $U=220\text{V}$, $I=0.4\text{A}$, $f=50\text{Hz}$, 求

(1) 此日光灯的功率因数;

(2) 若要把功率因数提高到 0.9, 需补偿的无功功率 Q_C 及电容量 C 各为多少?

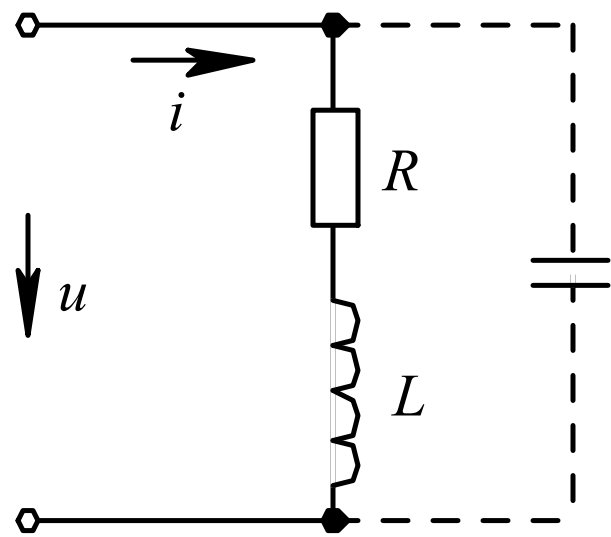


图 4.60 例 4.35 图



例 4.35 (二)

解 (1) 因为

$$P = UI \cos \varphi$$

所以
$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{40}{220 \times 0.4} = 0.455$$

(2) 由 $\cos \varphi_1 = 0.455$ 得 $\varphi_1 = 63^\circ$, $\tan \varphi_1 = 1.96$ 。
由 $\cos \varphi_2 = 0.9$ 得 $\varphi_2 = 26^\circ$, $\tan \varphi_2 = 0.487$ 。利用式(4.74)可得

$$Q_C = 40(1.96 - 0.487) = 58.9 \text{ var}$$

所以
$$C = \frac{Q_C}{\omega U^2} = \frac{58.9}{2 \times 3.14 \times 220^2} = 3.88 \times 10^{-6} \text{ F} = 3.88 \mu\text{F}$$



教学方法

结合实际讲解本节



思考题

1. 为什么不用串联电容器的方法提高功率因数？
2. 人工补偿时，并联电容器是不是越多越好？
3. 一台250kVA的变压器，带功率因数 $\cos\varphi=0.8$ ($\varphi>0$)的负载满载运行，若负载端 并联补偿电容，功率因数提高到0.9，求
 - (1) 补偿的无功功率QC
 - (2) 此变压器还能外接多少千瓦的电阻性负载？



4.14 谐 振



目的与要求

理解正弦交流电路谐振的概念



重点与难点

重点：串联谐振

难点：串联谐振

4.14.1 串联谐振（一）

1、谐振现象

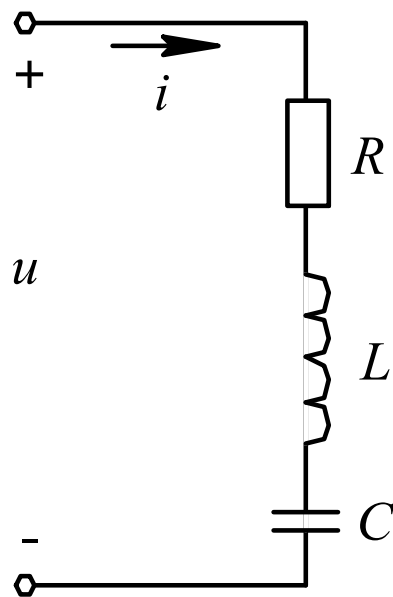


图4.61 R 、 L 、 C 串联电路

$$Z = R + j(X_L - X_C) = R + jX = |Z| \angle \varphi$$

当 $X=X_L-X_C=0$ 时, 电路相当于“纯电阻”电路, 其总电压 U 和总电流 I 同相。电路出现的这种现象称为“谐振”。



4.14.1 串联谐振（二）

2、产生谐振的条件

$$X_L - X_C = 0 \text{ 或 } X_L = X_C \quad \text{即:} \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

(1) 当L、C固定时, 可以改变电源频率达到谐振

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$



4.14.1 串联谐振（三）

(2) 当电源的频率 ω 一定时, 可改变电容 C 和电感 L 使电路谐振。

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} \quad (4.80)$$

$$L = \frac{1}{\omega^2 C}$$

例 4.36

图4.62为一 R 、 L 、 C 串联电路, 已知 $R=10\Omega$, $L=500\mu\text{H}$, C 为可变电容, 变化范围为 $12\sim 290\text{pF}$ 。若外施信号源频率为 800kHz , 则电容应为何值才能使电路发生谐振。

解 由于

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(2\pi f)^2 L} \\ &= \frac{1}{(2 \times \pi \times 800 \times 10^3)^2 \times 500 \times 10^{-6}} \\ &= 79.2 \text{ pF} \end{aligned}$$

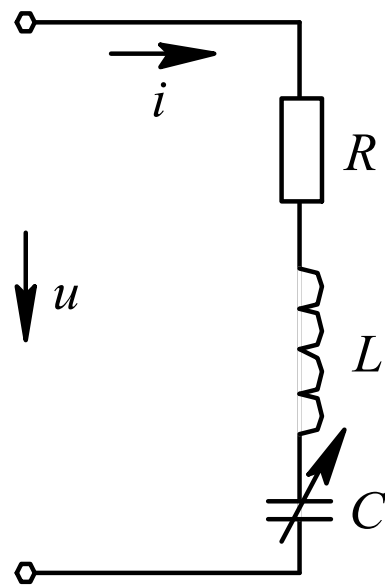


图 4.62 例4.36图



例 4.37 (一)

某收音机的输入回路（调谐回路），可简化为一 R 、 L 、 C 组成的串联电路，已知电感 $L=250\mu\text{H}$ ， $R=20\Omega$ ，今欲收到频率范围为 $525\sim 1610\text{kHz}$ 的中波段信号，试求电容 C 的变化范围。

解 由式(4.80)可知

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(2\pi f)^2 L}$$



例 4.37 (二)

当 $f=525\text{kHz}$ 时, 电路谐振, 则

$$C_1 = \frac{1}{(2\pi \times 525 \times 10^3)^2 \times 250 \times 10^6} = 368 \text{ pF}$$

当 $f=1610 \text{ kHz}$ 时, 电路谐振, 则

$$C_1 = \frac{1}{(2\pi \times 1610 \times 10^3)^2 \times 250 \times 10^6} = 39.1 \text{ pF}$$

所以电容 C 的变化范围为 $39.1 \sim 368 \text{ pF}$ 。



教学方法

与实验结合来讲解本节内容



思考题（一）

1. 串联电路的谐振条件是什么？串联电路的固有角频率和固有频率等于什么？
2. 为什么把串联谐振叫电压谐振，而把并联谐振叫电流谐振？
3. 已知某R、L、C串联电路中， $R=10\text{K}\Omega$ ， $L=0.1\text{mH}$ ， $C=0.4\text{pF}$ ， $U_S=0.1\text{V}$ ，则此电路的特性阻抗 ρ 及品质因数Q分别为多少？谐振时 U_C 为多少？



思考题（二）

4. 下图所示的R、L、C串联电路发生谐振时，电压表 和电流表的读数分别为多少？

